SOLUCIONÁRIO

Curso de Física Básica - Volume 3

2º edição

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 . \vec{J} + \varepsilon_0 . \mu_0 . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

hugo.marques@fisica.ufc.br

2025

SOLUCIONÁRIO
CURSO DE FÍSICA BÁSICA - VOL. 3
2ª EDIÇÃO

Hugo Marques de Sousa*

2025

*hugo.marques@fisica.ufc.br

SUMÁRIO

2 A Lei de Coulomb **9**

2.1 Comparando a força gravitacional com a eletrostática 10
2.2 1 Litro de hidrogênio gasoso 11
a Carga positiva total contida no gás 11
b Força de atração entre cargas do átomo de Hélio 11
c *Comparando com a atração gravitacional entre a Terra e o Pão de Açúcar 11
2.3 Modelo de Bohr 12
a Frequência de revolução do elétron 12
b Velocidade do elétron em órbita 12
2.4 Carga negativa em equilíbrio 13
a Oscilações verticais 13
b Oscilações horizontais 13
2.5 Esferas carregadas suspensas por fios 15
a Valor da carga 16
2.6 Força resultante sobre carga no centro de um triângulo equilátero 17
2.7 Fio semicircular uniformemente carregado 19
2.8 Fio reto infinito carregado 20
2.9 Carga oscilando periodicamente 22

3 O campo elétrico **23**

3.1 Linhas de campo de par de cargas puntiformes 24
3.2 Modelo clássico de molécula ionizada 26
a Campo elétrico que atua em $-e$ 26
b Relação entre o raio da órbita e a frequência angular 26
3.3 Plano uniformemente carregado 28
3.4 Fio uniformemente carregado 30
a Campo elétrico resultante 30
b Aplicando o resultado anterior 30
3.5 Fios finitos carregados 31

3.6 Espira quadrada uniformemente carregada . . . 33
3.7 Fluxo de carga puntiforme . . . 35
a Com carga no centro de um cubo . . . 35
b Com carga no vértice do cubo . . . 35
3.8 Densidade média de carga na atmosfera . . . 36
3.9 Campo elétrico gerado por par de placas uniformemente carregadas . . . 37
3.10 O átomo de Hidrogênio segundo J. J. Thomson . . . 38
a Campo elétrico sobre o elétron . . . 38
b Movimento Harmônico Simples associado ao elétron . . . 38
c Frequência de oscilação do elétron . . . 39
3.11 Revisando a álgebra vetorial . . . 40
3.12 Casca esférica uniformemente carregada . . . 41
a $0 \leq r \leq a$ . . . 41
b $a \leq r \leq b$ . . . 41
c $b \leq r \leq c$ . . . 41
d $c \leq r$ . . . 42
3.13 Densidade de carga que varia exponencialmente . . . 43
a Carga total da distribuição . . . 43
b Campo elétrico em qualquer ponto . . . 44
3.14 Camada carregada infinita . . . 46
a Campo elétrico acima, dentro e abaixo da camada . . . 46
b Verificando a Equação de Poisson . . . 47
3.15 Campo elétrico em cavidade no interior de esfera uniformemente carregada 48
3.16 Cilindro longo uniformemente carregado . . . 49
a Comportamento do campo elétrico gerado . . . 49
b Campo elétrico dentro do cilindro . . . 49
c Gráfico do campo elétrico em função do raio ρ . . . 50

4 O potencial eletrostático 51
4.1 A superfície equipotencial . . . 52
4.2 Potencial de esfera uniformemente carregada . . . 54
a Potencial interno e externo à esfera . . . 54
b Aplicando o modelo para o átomo de hidrogênio . . . 55
4.3 Potencial eletrostático de carga em campo eletrostático . . . 57
4.4 Carga puntiforme e um dipolo . . . 58
a Energia potencial da carga no campo eletrostático gerado pelo dipolo 58
b Força sobre a carga . . . 59
4.5 Dipolos interagindo entre si . . . 60
a Energia potencial de interação entre dois dipolos arbitrários . . . 60
b Dipolos alinhados à $\vec{r}$ e paralelos ou antiparalelos . . . 61
c Dipolos perpendiculares à $\vec{r}$ e paralelos ou antiparalelos . . . 62
d Aplicando à molécula de água . . . 62
4.6 Experimento de Rutherford . . . 63
4.7 Voltando ao modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio . . . 64
a Razão entre energia potencial eletrostática e energia cinética . . . 64
b Energia necessária para ionizar o átomo . . . 64
4.8 Gota líquida carregada dividindo-se . . . 65
a Variação da energia potencial eletrostática nesse processo . . . 65

b Aplicando o modelo para a fissão de U^{235} . . . 65
4.9 Demonstrando resultados do Cálculo . . . 66
a Provando que $\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = f.\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$ . . . 66
b Provando que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}$ . . . 66
4.10 Casca hemisférica com densidade superficial σ . . . 69
a Potencial eletrostático no centro da casca hemisférica . . . 69
b Velocidade de uma partícula no infinito . . . 69
4.11 Balão de borracha carregado uniformemente com carga Q . . . 71
a Energia eletrostática contida no balão . . . 71
b Variação da energia em relação ao raio do balão . . . 71

5 Capacitância e Capacitores. Dielétricos 72
5.1 O experimento de Millikan . . . 73
5.2 Capacitores ligados à Terra . . . 74
a Potencial das placas positivas . . . 74
b Variação da energia . . . 74
c Destino da energia perdida . . . 75
5.3 Ponte de capacitâncias . . . 76
5.4 Descobrindo a capacitância equivalente de um circuito usando resultados antigos . . . 77
5.5 Capacitância equivalente de um circuito complicado . . . 78
5.6 Associação infinita de capacitores . . . 80
5.7 Dielétrico entre as placas de um capacitor . . . 81
5.8 Capacitor esférico com dielétrico . . . 82
5.9 Capacitor de placas planas preenchido com dois dielétricos . . . 83
a Nova capacitância do capacitor . . . 83
b Densidade de carga nas placas . . . 84
5.10 Esfera dielétrica uniformemente carregada . . . 85
a Vetor campo elétrico . . . 85
b Diferença de potencial entre o centro e a superfície da esfera . . . 86

6 Corrente elétrica 87
6.1 Analisando uma válvula diodo . . . 88
a Velocidade dos elétrons . . . 88
b Densidade de elétrons em função da distância percorrida . . . 88
6.2 Corrente elétrica gerada por cilindro carregado . . . 89
6.3 Dissipação de energia de uma lâmpada . . . 90
6.4 Condutividade do ar na atmosfera da Terra . . . 91
6.5 A resistência elétrica de um capacitor . . . 92
a Capacitor de placas paralelas . . . 92
b Validade geral . . . 92
6.6 Cilindro com condutividade variável . . . 93
6.7 Bateria real alimentando circuito . . . 94
a Potência fornecida máxima . . . 94
b Potência fornecida e potência dissipada . . . 94
6.8 Analisando outro circuito resistivo . . . 95
a Valor da resistência externa . . . 95
b Resistência interna da bateria . . . 95

c Taxa de conversão de energia química em energia elétrica por unidade de tempo . . . 95
d Potência dissipada no resistor . . . 95
e Perda de potência na bateria . . . 95
6.9 Aquecedor elétrico . . . 96
6.10 Solução iônica de HCl . . . 97
a Razão da concentração de íons . . . 97
b Fator de Boltzman . . . 97
c Força eletromotriz resultante . . . 97

7 Campo magnético 98
7.1 Oscilação da agulha de uma bússola . . . 99
7.2 Campo magnético gerado pelo dipolo magnético . . . 100
a Comparando os dipolos elétrico e magnético . . . 100
b Interação entre agulhas e campo magnético . . . 100
7.3 Elétron orbitando a Terra . . . 101
a Frequência angular de rotação . . . 101
b Raio de curvatura do elétron . . . 101
7.4 Espectrógrafo de massa . . . 102
7.5 Espira circular interagindo com campo magnético . . . 103

8 Lei de Ampère 104
8.1 Modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio . . . 105
a Raio da primeira órbita circular . . . 105
b Corrente elétrica associada ao movimento circular do elétron . . . 105
c Campo magnético gerado pela órbita do elétron no núcleo . . . 106
d Momento de dipolo magnético . . . 106
8.2 Fios paralelos infinitos com corrente elétrica . . . 108
a Magnitude do campo magnético para $|x|< b$ . . . 108
b Magnitude do campo magnético para $|x|> b$ . . . 108
c Gráfico do campo magnético em função da posição x . . . 109
8.3 Espira retangular com corrente elétrica . . . 110
a Campo magnético no centro da espira . . . 110
b Condição limite em que $a >> b$ . . . 111
8.4 Espira quadrada com corrente elétrica . . . 113
a Campo magnético no eixo da espira . . . 113
b Campo magnético resultante quando $z >> L$ . . . 115
8.5 Campo magnético gerado por fios infinitos . . . 116
a Distribuição com simetria que gera anulamento . . . 116
b Distribuição com simetria que reforça o campo magnético . . . 116
8.6 Campo magnético gerado por arco circular . . . 118
8.7 Força magnética sobre espira retangular e fio infinito . . . 119
8.8 Campo magnético entre duas bobinas . . . 120
a Campo magnético no meio das espiras . . . 120
b O campo magnético é constante no centro da bobina . . . 121
8.9 Solenoide finito . . . 125
a Campo magnético dentro do solenoide . . . 125
b Caso em que $x >> a$ e $x >> L$ . . . 127
c Gráfico do comportamento do campo magnético . . . 128

8.10 Disco circular de material isolante carregado . . . 129
a Campo magnético no centro do disco . . . 129
b O momento de dipolo magnético . . . 130
8.11 Campo gerado por corrente elétrica em fio tridimensional . . . 131
a Campo gerado por corrente elétrica em fio retilíneo e infinito . . . 131
b Distribuição tridimensional de corrente elétrica . . . 132

9 Lei da Indução 133
9.1 Funcionamento de um fluxômetro . . . 134
9.2 Diferença de potencial entre trilhos de trem . . . 135
9.3 Experimento de Michael Faraday . . . 136
a Diferença de potencial entre o eixo e a periferia . . . 136
b Torque gerado pelo surgimento de corrente elétrica . . . 136
9.4 Barra metálica deslizando sobre trilhos . . . 138
a Sentido da corrente induzida . . . 138
b Aceleração da barra . . . 138
c Velocidade terminal da barra . . . 139
d Corrente elétrica quando a barra atinge a velocidade terminal . . . 139
e Energia na situação terminal . . . 139
9.5 Espira retangular entre par de fios com corrente elétrica . . . 140
9.6 Indutância mútua de espiras circulares . . . 142
9.7 Autoindutância entre espira circular e fio retilíneo . . . 143
9.8 Autoindutância de uma bobina toroidal quadrada . . . 146
9.9 Espira circular deslizando rumo a outra . . . 148
9.10 Indutância de bobinas ligadas em série . . . 151
9.11 Espira retangular caindo em plano perpendicular a campo magnético . . . 152
a Força sobre a espira entrando no campo magnético . . . 152
b Força sobre a espira saindo do campo magnético . . . 153
9.12 Espira retangular se afastando de fio retilíneo . . . 154
a Fluxo sobre a espira . . . 154
b Corrente elétrica induzida na espira . . . 154

10 Circuitos 156
10.1 Circuito resistivo . . . 157
10.2 Circuito RC após um longo tempo . . . 159
10.3 Diferença de potencial no capacitor após a chave ser ligada . . . 161
10.4 Frequências de oscilação em circuito LC . . . 163
10.5 Circuito RLC . . . 166
a Frequência angular de oscilação e constante de amortecimento . . . 166
b Calculando numericamente o item passado . . . 167
10.6 Impedância de circuito . . . 168
10.7 Frequência angular de oscilação livre de circuito RL interagindo com bobina 170
10.8 Frequência angular de ressonância . . . 171
10.9 Circuito RL com diferença de potencial alternada . . . 173
a Corrente elétrica no circuito . . . 173
b Termo transiente nulo . . . 175
10.10 Circuito RLC com diferença de potencial alternada . . . 176
a No capacitor . . . 177
b No indutor . . . 177

10.11 Circuito RC após ligar a chave . . . 179
a A corrente elétrica . . . 179
b Energia armazenada no capacitor . . . 179
c Energia fornecida pela bateria . . . 180
d Energia dissipada no resistor . . . 180
10.12 Espira circular girando em torno do eixo z . . . 181
a Força eletromotriz e corrente elétrica induzida na espira . . . 181
b Vetor momento de dipolo magnético . . . 182
c Torque sobre a espira . . . 182
10.13 Fio metálico enrolado em cilindro de madeira . . . 184
a Resistência do fio . . . 184
b A auto-indutância do fio . . . 184
c Diferença de fase entre a corrente elétrica e a diferença de potencial 184

11 Materiais magnéticos **185**
11.1 Razão entre o raio quadrático médio e o raio de Bohr para o gás Hélio . . . 186
11.2 Magnetização do ferro . . . 187
a Número de elétrons contribuintes ao campo magnético . . . 187
b Supondo que o ferro seja paramagnético . . . 188
11.3 Anel de Rowland . . . 189
a Energia armazenada no anel . . . 189
b Autoindutância do anel . . . 190
11.4 Anel de Rowland de ferro . . . 191
a Permeabilidade magnética relativa . . . 191
b Campo $\vec{H}$ no interior do ferro . . . 192
c Razão entre o campo $\vec{H}$ no entreferro e no material . . . 192
11.5 Calculando outras grandezas do ***Problema*** anterior . . . 193
a A energia armazenada no interior do ferro . . . 193
b A energia armazenada no entreferro . . . 193
c A auto-indutância do sistema . . . 194
11.6 Campo magnético em diferentes pontos de um material . . . 195
11.7 Introdução de campo no interior de um ímã . . . 196
11.8 Aplicando as ideias do ***Problema*** anterior na prática . . . 197
a No centro do cilindro . . . 197
b No centro da face norte . . . 198

12 As equações de Maxwell **199**
12.1 Capacitor de capas paralelas com carga variável . . . 200
12.2 Fio condutor cilíndrico transportando densidade de corrente . . . 201
a Campo magnético na superfície do cilindro . . . 201
b Vetor de Poynting na superfície . . . 201
c Energia dissipada por unidade de tempo no fio . . . 202
12.3 Emissão de luz por uma lâmpada . . . 203
12.4 Emissão de luz solar . . . 204
a Valores máximos dos campos elétrico e magnético . . . 204
b Intensidade na superfície solar . . . 204
12.5 Propagação de energia eletromagnética . . . 206
12.6 Cabo coaxial . . . 208
a Variação da corrente elétrica e diferença de potencial com a posição 208

b Propagação na velocidade da luz 208

CAPÍTULO

2

A LEI DE COULOMB

"A natureza não faz saltos, nem no mundo das ideias nem no mundo físico. Tudo está conectado por uma teia invisível de causalidade e significado que nossa mente limitada tenta desvendar."

Gottfried Wilhelm Leibniz

2.1 Comparando a força gravitacional com a eletrostática

A forças de atração gravitacional e eletrostática entre o elétron e o próton são, respectivamente, dadas por:

$$F_g = \frac{G.m_e.m_p}{d^2}$$

$$F_e = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{|q_e|.|q_p|}{d^2}$$

Sendo assim, a razão entre essas forças resulta em:

$$\sigma = \frac{F_e}{F_g} = \frac{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{|q_e|.|q_p|}{d^2}}{\frac{G.m_e.m_p}{d^2}} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{|q_e|.|q_p|}{d^2}.\frac{d^2}{G.m_e.m_p} = \frac{|q_e|.|q_p|}{4.\pi.\varepsilon_0.G.m_e.m_p}$$

Perceba que a razão σ não depende da distância entre as partículas.

Comumente, chamamos a constante $\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}$ de K, é oque faremos aqui:

$$\sigma = \frac{K.|q_e|.|q_p|}{G.m_e.m_p} = \frac{K}{G}.\frac{|q_e|.|q_p|}{m_e.m_p}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$\sigma = \frac{8,99.10^9}{6,67.10^{-11}}.\frac{1,6.10^{-19}.1,6.10^{-19}}{9,11.10^{-31}.1,67.10^{-27}} = 2,3.10^{39}$$

Desse resultado, concluímos que a força eletrostática é pouco mais de 10^{39} vezes mais intensa que a força gravitacional. Por isso, em situações de interação entre cargas, podemos desconsiderar totalmente a interação gravitacional.

2.2 1 Litro de hidrogênio gasoso

a Carga positiva total contida no gás

A equação de estado de um gás ideal nos dará o número de átomos de hélio em 1 litro. Aplicando-a, obtemos:

$$P.V = n.R.T$$

Lembre que o número n de moles é o número de átomos dividido pela constante de Avogadro. Logo:

$$P.V = \frac{N}{A}.R.T \Rightarrow N = \frac{P.V.A}{R.T}$$

O número atômico do Hélio é 2, ou seja, ele tem 2 prótons. Logo, para cada átomo de Hélio temos 2 prótons. Por isso, o número de prótons é o dobro do número de átomos de Hélio:

$$N_p = 2.N = 2.\frac{P.V.A}{R.T}$$

Por isso, a carga total é a carga fundamental multiplicada pela quantidade N_p:

$$Q = e.N_p = 2.e.\frac{P.V.A}{R.T}$$

As condições normais de temperatura e pressão são, respectivamente, $0° = 273,15\ K$ e $1\ atm = 1,01.10^5\ Pa$. Atente-se também que o volume deve ser usado em m^3 e não em litro.

$$N_p = 2.1,6.10^{-19}.\frac{1,01.10^5.10^{-3}.6,022.10^{23}}{8,31.273,15} = 8,6.10^3\ C$$

b Força de atração entre cargas do átomo de Hélio

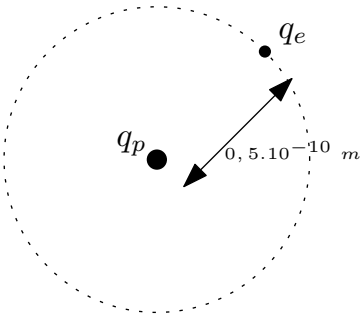
Como o átomo de Hélio é neutro, a carga negativa é, em módulo, igual à positiva. Então, o módulo da força de atração entre as duas a 1 m de distância é dada por*:

$$F = \frac{K.Q^2}{d^2} = \frac{8,99.10^9.(8,6.10^3)^2}{1^2} = 8,99.10^9.(8,6.10^3)^2 = 6,65.10^{17}\ N = 6,8.10^{16}\ Kgf$$

c *Comparando com a atração gravitacional entre a Terra e o Pão de Açúcar

*Não esqueça, para obter a unidade Kgf basta dividirmos o resultado em Newtons pela aceleração da gravidade.

2.3 Modelo de Bohr



a Frequência de revolução do elétron

Agora a força de atração eletrostática funcionará como uma resultante centrípeta. Então aplicando a Segunda Lei de Newton ao elétron, obtemos:

$$F_r = m_e.a_c \Rightarrow \frac{K.|q_e|.|q_p|}{d^2} = m_e.\frac{v^2}{d} \Rightarrow \frac{K.|q_e|.|q_p|}{d} = m_e.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{K.|q_e|.|q_p|}{m_e.d}}$$

Agora que temos a velocidade em função de variáveis que conhecemos, podemos escrever a velocidade média, que depende do período (inverso da frequência que queremos!):

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{2.\pi.d}{T} = 2.\pi.d.f \Rightarrow f = \frac{v}{2.\pi.d} = \frac{1}{2.\pi.d}.\sqrt{\frac{K.|q_e|.|q_p|}{m_e.d}} = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{K.|q_e|.|q_p|}{m_e.d^3}}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$f = \frac{1}{2.\pi}.\sqrt{\frac{8,99.10^9.(1,6.10^{-19})^2}{9,11.10^{-31}.(0,5.10^{-10})^3}} = 7,2.10^{15}\ Hz$$

b Velocidade do elétron em órbita

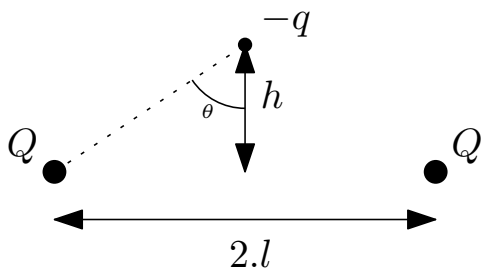
A velocidade foi a primeira coisa que calculamos no item anterior, precisamos apenas substituir os valores:

$$v = \sqrt{\frac{8,99.10^9.(1,6.10^{-19})^2}{9,11.10^{-31}.0,5.10^{-10}}} = 2,2.10^6\ \frac{m}{s}$$

A velocidade é mais de 100 vezes menor que a velocidade da luz, portanto não precisamos considerar a relatividade para tratar do problema. Entretanto, sabemos que toda carga em movimento acelerado emite radiação, ou seja, perde energia, então não há como o elétron ter uma órbita estável pensando apenas na eletrostática, é preciso considerar a física quântica.

2.4 Carga negativa em equilíbrio

a Oscilações verticais



Perceba que, pela simetria do sistema, a força resultante sobre a carga é dado por:

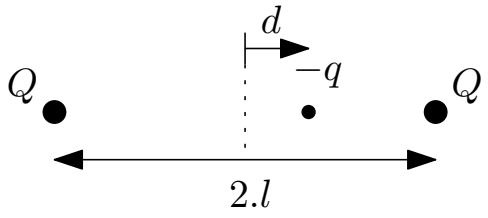
$$F = -2.\frac{K.Q.q}{d^2}.cos(\theta) = -2.\frac{K.Q.q}{h^2+l^2}.\frac{h}{\sqrt{h^2+l^2}} = -2.\frac{K.Q.q}{(h^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}.h$$

Para um h muito pequeno, ou seja, tendendo a um valor muito menor que a distância l, o denominador pode ser escrito apenas como l^3, pois $h^2 + l^2 \approx l^2$. Assim, obtemos:

$$F = -2.\frac{K.Q.q}{l^3}.h$$

Assim, obtivemos uma força do tipo $-k.x$, a mesma força das molas. Logo, temos uma força conservativa, e consequentemente o equilíbrio é estável, pois a carga $-q$ ficará oscilando, passando pela posição de equilíbrio.

b Oscilações horizontais



Agora vamos calcular o módulo da força imposta à mesma carga negativa, mas agora deslocada horizontalmente:

$$F = \frac{K.q.q}{(l-d)^2} - \frac{K.q.q}{(l+d)^2} = K.q^2.\left[\frac{1}{(l-d)^2} - \frac{1}{(l+d)^2}\right] = K.q^2.\left[\frac{(l+d)^2-(l-d)^2}{(l+d)^2.(l-d)^2}\right]$$

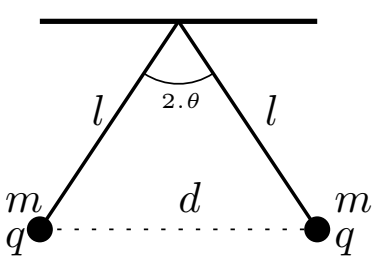
$$F = K.Q.q.\left[\frac{l^2+d^2+2.l.d-l^2-d^2+2.l.d}{(l+d)^2.(l-d)^2}\right] = K.Q.q.\left[\frac{4.l.d}{(l+d)^2.(l-d)^2}\right]$$

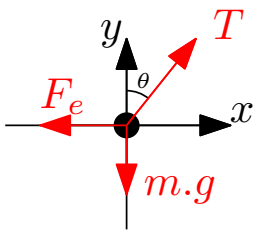
Novamente, quando a distância d for muito pequena, poderemos reescrever o denominador como l^4, pois $l + d = l - d \approx l$. Sendo assim, obtemos:

$$F = 4.\frac{K.Q.q}{l^3}.d$$

Perceba que a força sempre terá o "mesmo sinal"que o deslocamento d. Na prática, isso nos diz que se deslocarmos a carga um pouco para a direita, sobre ela atuará uma força resultante para a direita (o mesmo vale para a esquerda). Portanto, diferente do caso passado, após deslocarmos a carga, ela não voltará a passar pela posição de equilíbrio, sendo assim teremos um equilíbrio instável.

2.5 Esferas carregadas suspensas por fios





Como as cargas estão em equilíbrio, podemos aplicar a condição de equilíbrio nas duas direções. As equações de equilíbrio horizontal e vertical são, respectivamente:

$$F_{el} - T.sen(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q^2}{d^2} - T.sen(\theta) = 0$$

$$T.cos(\theta) - m.g = 0$$

Da equação de equilíbrio vertical, obtemos o valor da tensão:

$$T = \frac{m.g}{cos(\theta)}$$

Substituindo na equação de equilíbrio horizontal, obtemos:

$$\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q^2}{d^2} - \frac{m.g}{cos(\theta)}.sen(\theta) = 0$$

A distância d entre as cargas é determinada usando a Lei dos Cossenos:

$$d^2 = l^2 + l^2 - 2.l.l.cos(2.\theta) = 2.l^2 - 2.l^2.cos(2.\theta) = 2.l^2.[1 - cos(2.\theta)]$$

Lembre-se que $cos(2.\theta) = cos(\theta + \theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$ e que $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$. Com isso, a distância d pode ser escrita ainda como:

$$d^2 = 2.l^2.[1 - cos^2(\theta) + sen^2(\theta)] = 2.l^2.[sen^2(\theta) + sen^2(\theta)] = 4.l^2.sen^2(\theta)$$

Substituindo na equação inicial, obtemos:

$$\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q^2}{4.l^2.sen^2(\theta)} - \frac{m.g}{cos(\theta)}.sen(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q^2}{4.l^2.sen^2(\theta)} = \frac{m.g}{cos(\theta)}.sen(\theta)$$

$$\frac{q^2}{16.\pi.\varepsilon_0.l^2.sen^2(\theta)} = \frac{m.g}{cos(\theta)}.sen(\theta) \Rightarrow q^2.cos(\theta) = 16.\pi.\varepsilon_0.l^2.m.g.sen^3(\theta)$$

Sendo assim, provamos oque queríamos partindo das condições de equilíbrio.

a Valor da carga

Primeiramente, da equação obtida, vamos isolar a carga[†]:

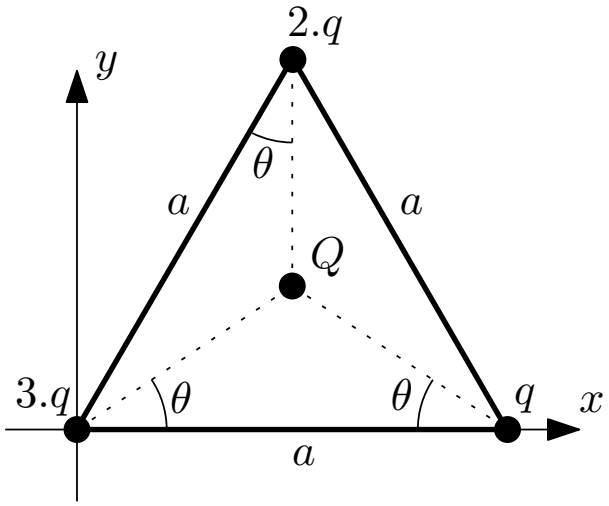
$$q = \pm\sqrt{\frac{16.\pi.\varepsilon_0.l^2.m.g.sen^3(\theta)}{cos(\theta)}} = \pm\sqrt{\frac{4.l^2.m.g.sen^3(\theta)}{K.cos(\theta)}}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$q = \pm\sqrt{\frac{4.0,2^2.10^{-3}.9,8.sen^3(30^\circ)}{8,99.10^9.cos(30^\circ)}} = \pm 1,6.10^{-7}\ C$$

[†]O enunciado não nos diz se as cargas são positivas ou negativa, apenas diz que são iguais. Por isso, teremos de considerar as duas soluções.

2.6 Força resultante sobre carga no centro de um triângulo equilátero



O centro do triângulo é o ponto em que as retas que dividem os ângulos ao meio se encontram. Logo, a posição da carga Q é:

$$\vec{r}_Q = \frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{a}{2}.tg(\varphi)\,\hat{y} = \frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{a}{2}.tg(30°)\,\hat{y} = \frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}.a}{6}\,\hat{y}$$

Teremos que mapear a posição vetorial das outras 3 cargas. Respectivamente das cargas $3.q$, q e $2.q$, obtemos:

$$\vec{r}_{3.q} = 0\,\hat{x} + 0\,\hat{y} = \vec{0}$$

$$\vec{r}_q = a\,\hat{x} + 0\,\hat{y} = a\,\hat{x}$$

$$\vec{r}_{2.q} = \frac{a}{2}\,\hat{x} + h\,\hat{y} = \frac{a}{2}\,\hat{x} + \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}\,\hat{y} = \frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}.a\,\hat{y}$$

Em posse dos vetores que dão a posição de todas as cargas do sistema, poderemos calcular a distância entre a carga Q e as outras, ela que nos interessará. O módulo $r_{Q,b}$ é o módulo da distância entre as cargas Q e b.

$$r_{Q,3.q} = |\vec{r}_Q - \vec{r}_{3.q}| = \left|\frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}.a}{6}\,\hat{y} - \vec{0}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3.a^2}{36}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{3.a^2 + a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r_{Q,q} = |\vec{r}_Q - \vec{r}_q| = \left|\frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}.a}{6}\,\hat{y} - a\,\hat{x}\right| = \left|-\frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}.a}{6}\,\hat{y}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3.a^2}{36}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r_{Q,2.q} = |\vec{r}_Q - \vec{r}_{2.q}| = \left| \frac{a}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}.a}{6}\,\hat{y} - \frac{a}{2}\,\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}.a\,\hat{y} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}.a}{6}\,\hat{y} - \frac{\sqrt{3}}{2}.a\,\hat{y} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}.a - 3.\sqrt{3}.a}{6}\,\hat{y} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{Q,2.q} = \sqrt{\frac{3.a^2}{9}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Os vetores de força de repulsão têm a mesma direção da linha que liga as cargas. Logo, teremos:

$$\vec{F}_{Q,3.q} = \frac{K.3.q.Q}{r^2_{Q,3.q}}.(cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y}) = \frac{9.K.q.Q}{a^2}.(cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y})$$

$$\vec{F}_{Q,q} = \frac{K.q.Q}{r^2_{Q,q}}.(-cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y}) = \frac{3.K.q.Q}{a^2}.(-cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y})$$

$$\vec{F}_{Q,2.q} = \frac{K.2.q.Q}{r^2_{Q,3.q}}.(-\hat{y}) = -\frac{6.K.q.Q}{a^2}\ \hat{y}$$

Agora somamos tudo para obter a força resultante:

$$\vec{F} = \vec{F}_{Q,3.q} + \vec{F}_{Q,q} + \vec{F}_{Q,2.q} = \frac{9.K.q.Q}{a^2}.(cos(\theta)\,\hat{x} + sen(\theta)\,\hat{y}) + \frac{3.K.q.Q}{a^2}.(-cos(\theta)\,\hat{x} + sen(\theta)\,\hat{y}) - \frac{6.K.q.Q}{a^2}\,\hat{y}$$

$$\vec{F} = \left[\frac{9.K.q.Q}{a^2}.cos(\theta) - \frac{3.K.q.Q}{a^2}.cos(\theta)\right]\hat{x} + \left[\frac{9.K.q.Q}{a^2}.sen(\theta) + \frac{3.K.q.Q}{a^2}.sen(\theta) - \frac{6.K.q.Q}{a^2}\right]\hat{y}$$

$$\vec{F} = \left[\frac{6.K.q.Q}{a^2}.cos(\theta)\right]\hat{x} + \left[\frac{12.K.q.Q}{a^2}.sen(\theta) - \frac{6.K.q.Q}{a^2}\right]\hat{y}$$

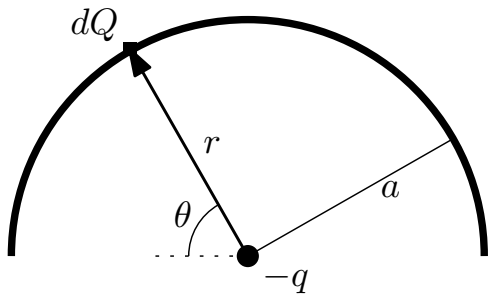
Como θ é a bissetriz do ângulo do triângulo, ele vale 30°. Portanto, obtemos:

$$\vec{F} = \left[\frac{6.K.q.Q}{a^2}.cos(30°)\right]\hat{x} + \left[\frac{12.K.q.Q}{a^2}.sen(30°) - \frac{6.K.q.Q}{a^2}\right]\hat{y} = \frac{\sqrt{3}.3.K.q.Q}{a^2}\,\hat{x}$$

Sendo assim, o módulo da força resultante é:

$$F = \frac{\sqrt{3}.3.K.q.Q}{a^2} = \frac{\sqrt{3}.3}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q.Q}{a^2}$$

2.7 Fio semicircular uniformemente carregado



A atração entre a carga $-q$ e uma carga infinitesimal dQ do fio é dada por:

$$d\vec{F} = \frac{K.q}{r^2}.dQ\ \hat{r}$$

A carga dQ pode ser escrita usando a densidade linear de carga do fio:

$$\lambda = \frac{Q}{\pi.a} = \frac{dQ}{dl} \Rightarrow dQ = \frac{Q}{\pi.a}.dl$$

Podemos ainda, partindo da definição de Radianos, obtemos:

$$dQ = \frac{Q}{\pi.a}.a.d\theta = \frac{Q}{\pi}.d\theta$$

Substituindo na equação da força, obtemos:

$$d\vec{F} = \frac{K.q}{r^2}.\frac{Q}{\pi}.d\theta\ \hat{r} = \frac{K.q}{r^2}.\frac{Q}{\pi}.d\theta.(-cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y})$$

Perceba que a distância r é constante e igual à circunferência do fio semicircular.

$$d\vec{F} = -\frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.cos(\theta).d\theta\ \hat{x} + \frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.sen(\theta).d\theta\ \hat{y}$$

Para calcular a força resultante, integramos de 0 à π, variando infinitesimalmente o ângulo.

$$\vec{F} = -\frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.\hat{x}.\int_0^{\pi} cos(\theta)\ d\theta + \frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.\hat{y}.\int_0^{\pi} sen(\theta)\ d\theta$$

$$\vec{F} = -\frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.\hat{x}.[sen(\theta)]\Big|_0^{\pi} + \frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.\hat{y}.[-cos(\theta)]\Big|_0^{\pi}$$

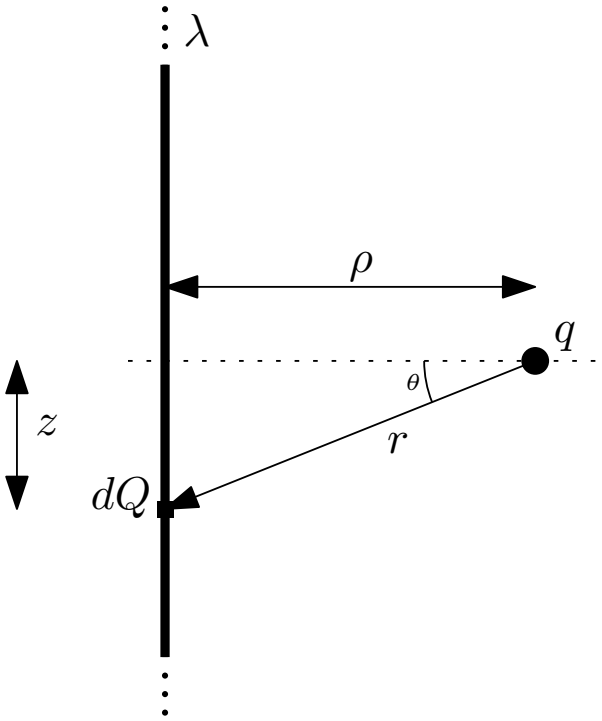
$$\vec{F} = -\frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.\hat{x}.[sen(\pi) - sen(0)] + \frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.\hat{y}.[-cos(\pi) + cos(0)]$$

$$\vec{F} = \frac{K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}.\hat{y}.[2] = \frac{2.K.q}{a^2}.\frac{Q}{\pi}\ \hat{y} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{2.q.Q}{a^2}\ \hat{y} = \frac{q.Q}{2.\pi^2.\varepsilon_0.a^2}\ \hat{y}$$

Portanto, a força resultante aponta para cima e tem módulo:

$$F = \frac{q.Q}{2.\pi^2.\varepsilon_0.a^2}$$

2.8 Fio reto infinito carregado



A força infinitesimal de repulsão entre a carga q e a carga infinitesimal dQ de um pedaço muito pequeno do fio é:

$$d\vec{F} = -\frac{K.q}{r^2}.dQ\ \hat{r}$$

O sinal de negativo indica apenas que a força aponta no sentido inverso do vetor $\vec{r}$, pois é de repulsão.
Temos a densidade linear de carga do fio, então podemos expressar dQ em função de λ.

$$\lambda = \frac{dQ}{dz} \Rightarrow dQ = \lambda.dz$$

Pela figura, veja que:

$$tg(\theta) = \frac{z}{\rho} \Rightarrow z = \rho.tg(\theta) \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = \rho.\frac{d}{d\theta}[tg(\theta)] \Rightarrow dz = sec^2(\theta).\rho.d\theta$$

Portanto, a carga infinitesimal associada ao pequeno pedaço de fio é:

$$dQ = \lambda.sec^2(\theta).\rho.d\theta$$

Substituindo na expressão da força:

$$d\vec{F} = -\frac{K.q}{r^2}.\lambda.sec^2(\theta).\rho.d\theta\ \hat{r}$$

O vetor unitário $\hat{r}$ pode ser expresso pelo ângulo θ:

$$\hat{r} = -cos(\theta)\ \hat{x} - sen(\theta)\ \hat{z}$$

Logo, a força de repulsão associada à cada carga infinitesimal dQ é:

$$d\vec{F} = \frac{K.q}{r^2}.\lambda.sec^2(\theta).\rho.d\theta\ (cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{z})$$

$$d\vec{F} = \frac{K.q}{r^2}.\lambda.sec^2(\theta).\rho.cos(\theta).d\theta\ \hat{x} + \frac{K.q}{r^2}.\lambda.sec^2(\theta).\rho.sen(\theta).d\theta\ \hat{z}$$

O módulo do vetor $\vec{r}$ pode ser descoberto com o Teorema de Pitágoras:

$$r^2 = z^2 + \rho^2 = \rho^2.tg^2(\theta) + \rho^2 = \rho^2.(1 + tg^2(\theta)) = \rho^2.sec^2(\theta)$$

Substituindo, finalmente obtemos a força infinitesimal de forma que é conveniente de integrar.

$$d\vec{F} = \frac{K.q}{\rho^2.sec^2(\theta)}.\lambda.sec^2(\theta).\rho.cos(\theta).d\theta\ \hat{x} + \frac{K.q}{\rho^2.sec^2(\theta)}.\lambda.sec^2(\theta).\rho.sen(\theta).d\theta\ \hat{z}$$

$$d\vec{F} = \frac{K.q}{\rho}.\lambda.cos(\theta).d\theta\ \hat{x} + \frac{K.q}{\rho}.\lambda.sen(\theta).d\theta\ \hat{z}$$

Como o fio é infinito, perceba que o ângulo de abertura θ deve ir de $-\frac{\pi}{2}$ até $\frac{\pi}{2}$. Integrando, obtemos a força total gerada pelo fio na carga:

$$\vec{F} = \frac{K.q}{\rho}.\lambda.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(\theta)\ d\theta\ \hat{x} + \frac{K.q}{\rho}.\lambda.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen(\theta)\ d\theta\ \hat{z}$$

$$\vec{F} = \frac{K.q}{\rho}.\lambda.sen(\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ \hat{x} + \frac{K.q}{\rho}.\lambda.[-cos(\theta)]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ \hat{z} = \frac{2.K.q}{\rho}.\lambda\ \hat{x}$$

Portanto, a força resultante é uma força horizontal que aponta para $+\hat{x}$ e tem módulo:

$$F = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{2.q}{\rho}.\lambda = \frac{q.\lambda}{2.\pi.\varepsilon_0.\rho}$$

2.9 Carga oscilando periodicamente

Já calculamos a força resultante sobre a carga negativa no item ***a*** do ***Problema 2.4***. Lá vimos que:

$$F = -\frac{2.K.Q.q}{l^3}.h$$

Sendo l a distância entre as cargas, que nesse caso será $\frac{d}{2}$. Então. obtemos que a força é:

$$F = -\frac{2.2^3.K.Q.q}{d^3}.y = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{2^4.Q.q}{d^3}.y \Rightarrow F = -\frac{4.q.Q}{\pi.\varepsilon_0.d^3}.y$$

A força, como vimos, é do tipo $-k.x$, que é a mesma força exercida por uma mola. A frequência angular associada à mola de constante elástica k é:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{4.q.Q}{\pi.\varepsilon_0.d^3}}{m}} = 2.\sqrt{\frac{q.Q}{m.\pi.\varepsilon_0.d^3}}$$

CAPÍTULO

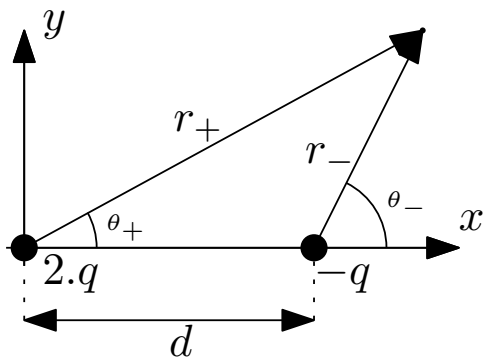
3

O CAMPO ELÉTRICO

"O espanto é o sentimento que marca o nascimento da filosofia. Quem não se maravilha com o mistério da existência jamais se aproximará da sabedoria."

ARISTÓTELES

3.1 Linhas de campo de par de cargas puntiformes



Vamos considerar um ponto $(x,\ y)$ arbitrário. O campo elétrico será a resultante da contribuição das cargas positiva e negativa, ou seja, a soma dos campos gerados por cada uma. Por superposição, teremos:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{K.2.q}{r_+^2}\ \hat{r}_+ - \frac{K.q}{r_-^2}\ \hat{r}_-$$

Os vetores distância serão:

$$\vec{r}_+ = r_+.cos(\theta_+)\ \hat{x} + r_+.sen(\theta_+)\ \hat{y}$$

$$\vec{r}_- = r_-.cos(\theta_-)\ \hat{x} + r_-.sen(\theta_-)\ \hat{y}$$

Podemos expressar as funções trigonométricas em função das distâncias que conhecemos:

$$\vec{r}_+ = r_+.\frac{x}{r_+}\ \hat{x} + r_+.\frac{y}{r_+}\ \hat{y} = x\ \hat{x} + y\ \hat{y}$$

$$\vec{r}_- = r_-.\frac{x-d}{r_-}\ \hat{x} + r_-.\frac{y}{r_-}\ \hat{y} = (x-d)\ \hat{x} + y\ \hat{y}$$

Consequentemente, os vetores unitários serão:

$$\hat{r}_+ = \frac{\vec{r}_+}{r_+} = \frac{x\ \hat{x} + y\ \hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\hat{r}_- = \frac{\vec{r}_-}{r_-} = \frac{(x-d)\ \hat{x} + y\ \hat{y}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}$$

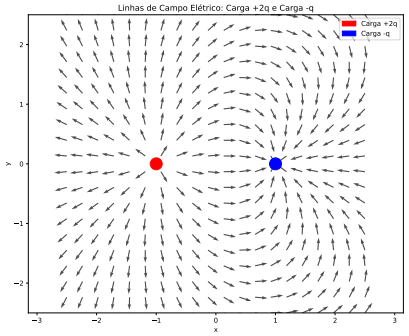
Agora podemos finalmente voltar à equação do campo elétrico:

$$\vec{E} = \frac{K.2.q}{x^2+y^2}.\frac{x\ \hat{x} + y\ \hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{K.q}{(x-d)^2+y^2}.\frac{(x-d)\ \hat{x} + y\ \hat{y}}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{K.2.q}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.[x\ \hat{x} + y\ \hat{y}] - \frac{K.q}{((x-d)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.[(x-d)\ \hat{x} + y\ \hat{y}]$$

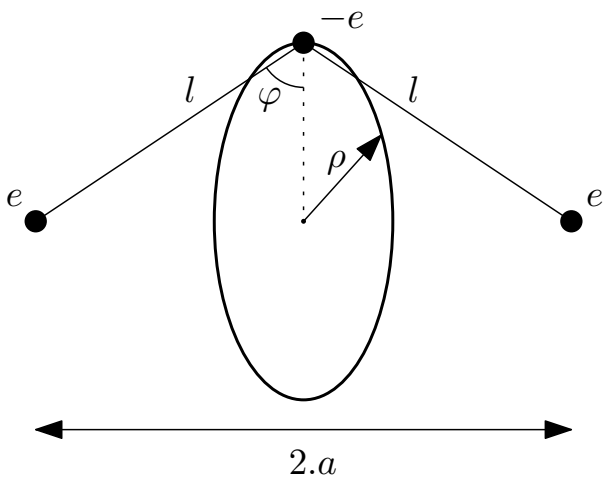
$$\vec{E} = \left[\frac{K.2.q}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.x - \frac{K.q}{((x-d)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.(x-d) \right] \hat{x} + \left[\frac{K.2.q}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.y - \frac{K.q}{((x-d)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.y \right] \hat{y}$$

Com essa expressão, podemos facilmente desenhar as linhas de campo. Teremos algo do tipo:



Perceba que nas proximidades de cada carga, o campo elétrico se comporta simplesmente como o campo de uma carga puntiforme, e em pontos mais distantes vemos mais claramente a superposição.

3.2 Modelo clássico de molécula ionizada



a Campo elétrico que atua em $-e$

Por conta do tipo de movimento da carga $-e$, a distância das cargas positivas à carga negativa é constante e pode ser determinada com o Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = a^2 + \rho^2 \Rightarrow l = \sqrt{a^2 + \rho^2}$$

Por superposição, a força resultante apontará sempre para o centro da trajetória circular descrita pela carga $-e$. O módulo da força resultante é, portanto:

$$F = 2.F_e.cos(\varphi) = 2.\frac{K.e^2}{l^2}.\frac{\rho}{l} = 2.\frac{K.e^2.\rho}{l^3} = 2.\frac{K.e^2.\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Lembre que a relação entre a força elétrica e o campo elétrico é:

$$E = \frac{F}{|q_0|}$$

Sendo assim, o campo elétrico sobre a carga $-e$ é:

$$E = 2.\frac{K.e.\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e.\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e.\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b Relação entre o raio da órbita e a frequência angular

Como vimos, a força que atua sobre o elétron é:

$$F = \frac{1}{2.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2.\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

O módulo tem o mesmo formato da força de Hooke para as molas, podemos fazer a analogia:

$x \to \rho$
$k \to \frac{1}{2.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$

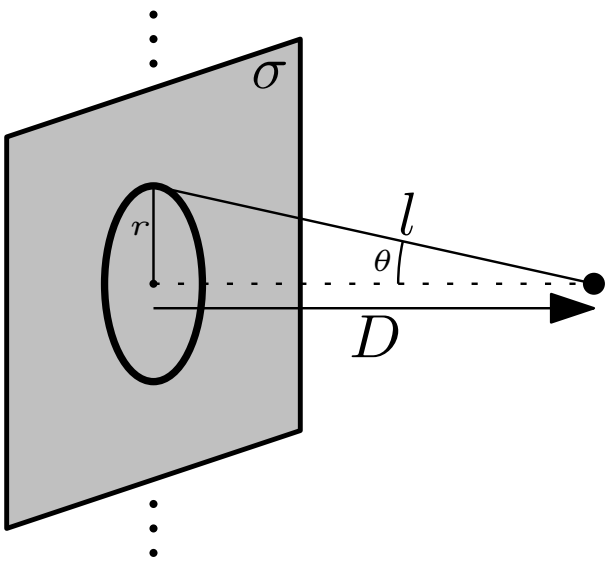
Sendo assim, a frequência angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{2.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m.(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Assim, concluímos que:

$$\omega^2 \propto \left[\frac{1}{a^2+\rho^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

3.3 Plano uniformemente carregado



Como queremos pontos do plano que estão, no máximo, a uma distância $2.D$ do ponto P, podemos calcular o raio máximo da região no plano que consideraremos. Por Pitágoras, temos:

$$(2.D)^2 = D^2 + R^2 \Rightarrow R = \sqrt{3}.D$$

Como a região a ser considerada é circular, vamos considerar fitas de raio r e largura dr. Aproveitando a simetria, o campo elétrico resultante de uma das fitas é:

$$dE = \frac{dF}{|q_0|}.cos(\theta) = \frac{K.dQ}{l^2}.cos(\theta)$$

As cargas de cada fita podem ser expressas em função da densidade e raio do círculo:

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \Rightarrow dQ = \sigma.dA = \sigma.2.\pi.r.dr$$

Também podemos reescrever o cosseno usando a Trigonometria. Então, o campo elétrico infinitesimal será:

$$dE = \frac{K.\sigma.2.\pi.r.dr}{l^2}.\frac{D}{l} = \frac{K.D.\sigma.2.\pi.r.dr}{l^3}$$

A distância l até cada ponto da fita pode ser expressa usando o Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = r^2 + D^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + D^2}$$

Substituindo:

$$dE = \frac{K.D.\sigma.2.\pi.r.dr}{(r^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.\pi.D.\sigma.K.\frac{r.dr}{(r^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.\pi.D.\sigma.\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{r.dr}{(r^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\frac{r.dr}{(r^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, para saber a contribuição do disco todo, integramos a contribuição de cada fita do raio zero até o limite R:

$$E = \int_0^R \frac{D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\frac{r}{(r^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}\ dr = \frac{D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\int_0^R \frac{r}{(r^2+D^2)^{\frac{3}{2}}}\ dr$$

Agora fazemos uma substituição simples, chamemos $r^2 + D^2 = u$, ou seja, $du = 2.r.dr$. Lembre que ao substituirmos a variável, os limites também deverão se ajustar:

$$E = \frac{D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\int_{D^2}^{R^2+D^2} \frac{r}{u^{\frac{3}{2}}}\ \frac{du}{2.r} = \frac{D.\sigma}{4.\varepsilon_0}.\int_{D^2}^{R^2+D^2} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\ du = \frac{D.\sigma}{4.\varepsilon_0}.\left[\frac{-2}{u^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg|_{D^2}^{R^2+D^2}$$

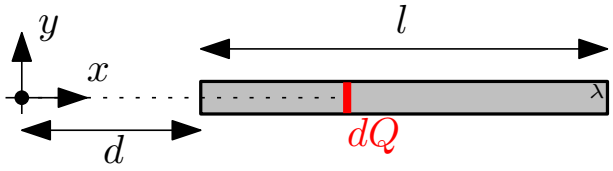
$$E = \frac{-D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + D^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2}}\right]$$

Já vimos quanto vale o raio máximo R:

$$E = \frac{-D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{\sqrt{3.D^2 + D^2}} - \frac{1}{\sqrt{D^2}}\right] = \frac{-D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{2.D} - \frac{1}{D}\right] = \frac{-D.\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left[-\frac{1}{2.D}\right] = \frac{\sigma}{4.\varepsilon_0}$$

Para um plano infinito (ou próximo de um plano finito), o campo elétrico resultante sobre um ponto é $\frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}$. Perceba que a contribuição obtida é metade desse valor, ou seja, fica comprovado que metade do campo elétrico resultante advém dos pontos do plano que estão a, no máximo, $2.D$ de distância.

3.4 Fio uniformemente carregado



a Campo elétrico resultante

O módulo campo elétrico infinitesimal gerado por conta de uma carga infinitesimal do fio é:

$$dE = \frac{dF}{|q_0|} = \frac{K.dQ}{x^2}$$

A quantidade de carga pode ser expressa em função da densidade linear de carga:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \Rightarrow dQ = \lambda.dx$$

Substituindo, obtemos:

$$dE = \frac{K.\lambda.dx}{x^2} = K.\lambda.\frac{dx}{x^2}$$

Os limites superior e inferior serão, respectivamente, $l + d$ e d. Assim, obtemos o campo elétrico resultante gerado por todo o fio:

$$E = \int_d^{d+l} K.\lambda.\frac{1}{x^2}\,dx = K.\lambda.\int_d^{d+l}\frac{1}{x^2}\,dx = K.\lambda.\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_d^{d+l} = K.\lambda.\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right] = K.\lambda.\frac{d+l-d}{d.(l+d)}$$

$$E = K.\lambda.\frac{l}{d.(l+d)} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\lambda.\frac{l}{d.(l+d)}$$

Como se trata de um campo elétrico que surge a partir da força eletrostática de repulsão (o fio tem carga positiva), o vetor campo elétrico aponta para $-\hat{x}$.

b Aplicando o resultado anterior

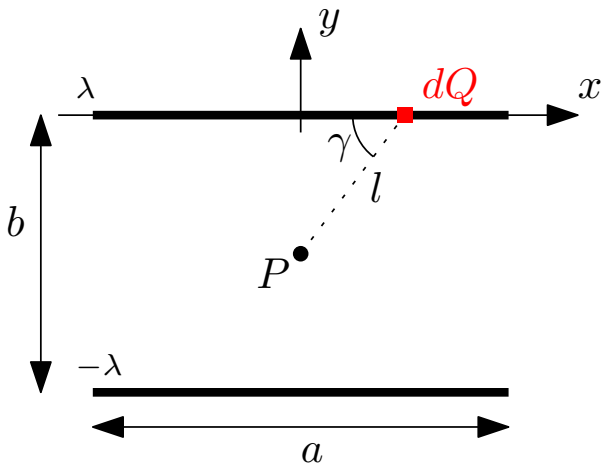
Inicialmente, vamos escrever a densidade linear explicitamente em função da carga e comprimento do fio, isso facilitará:

$$E = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Q}{l}.\frac{l}{d.(l+d)} = \frac{Q}{4.\pi.\varepsilon_0.d.(d+l)}$$

Substituindo os valores:

$$E = \frac{3.10^{-6}}{4.\pi.8,85.10^{-12}.5.10^{-2}.(5.10^{-2}+5.10^{-2})} = 5,4.10^6\ N$$

3.5 Fios finitos carregados



Observe que o campo elétrico resultante gerado pelo fio de densidade λ gerará, sobre o ponto P uma resultante no sentido $-\hat{y}$. Para o fio de densidade $-\lambda$ **não** teremos algo diferente, a resultante é a mesma, pois como a carga é negativa, o campo elétrico será atrativo. Por isso, podemos calcular apenas a contribuição do fio de densidade λ e multiplicar por 2 para obter o campo elétrico resultante.

A contribuição infinitesimal de uma carga dQ do fio no ponto P é:

$$dE_\lambda = \frac{dF_\lambda}{|q_0|}.sen(\gamma) = \frac{K.dQ}{l^2}.sen(\gamma) = \frac{K.dQ}{l^2}.\frac{\frac{b}{2}}{l} = \frac{b}{2}.\frac{K.dQ}{l^3}$$

Vamos reescrever a densidade dQ em função da densidade linear:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \Rightarrow dQ = \lambda.dx$$

Podemos ainda escrever a distância l usando o Teorema de Pitágoras:

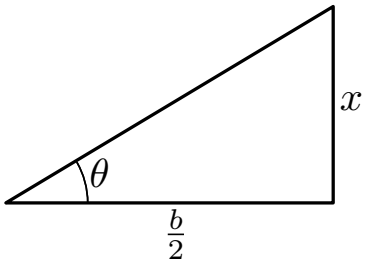
$$l^2 = x^2 + \left[\frac{b}{2}\right]^2 \Rightarrow l = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}}$$

Assim, obtemos:

$$dE_\lambda = \frac{b}{2}.\frac{K.\lambda.dx}{\left[x^2 + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{K.\lambda.b}{2}.\frac{dx}{\left[x^2 + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Pela nossa orientação, o fio vai de $\frac{-a}{2}$ até $\frac{a}{2}$. Então, o campo elétrico total gerado pelo fio de densidade λ no ponto P é:

$$E_\lambda = \frac{K.\lambda.b}{2}.\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\left[x^2 + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\, dx$$



Perceba que os métodos convencionais de substituição simples não funcionam, teremos que fazer uma substituição trigonométrica. Mais especificamente, fazemos:

$$x = \frac{b}{2}.tg(\theta), \text{ consequentemente, teremos } dx = \frac{b}{2}.sec^2(\theta).d\theta$$

Vamos mudar de variável, então tecnicamente deveríamos mudar os limites de integração. Perceba que os novos limites envolveriam $arctg()$, oque não é muito conveniente. Então, resolveremos a integral em θ, e no final voltaremos para a variável x original e aplicamos os limites que já conhecemos. Portanto, a nova integral é:

$$\int \frac{1}{\left[x^2 + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int \frac{1}{\left[\frac{b^2}{4}.tg^2(\theta) + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}.\frac{b}{2}.sec^2(\theta)\, d\theta = \int \frac{1}{\frac{b^3}{2^3}.\left[tg^2(\theta)+1\right]^{\frac{3}{2}}}.\frac{b}{2}.sec^2(\theta)\, d\theta$$

Lembre que $1 + tg^2(x) = sec^2(x)$. Assim, obtemos:

$$\int \frac{1}{\left[x^2 + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int \frac{1}{\frac{b^3}{2^3}.sec^3(\theta)}.\frac{b}{2}.sec^2(\theta)\, d\theta = \frac{4}{b^2}.\int \frac{d\theta}{sec(\theta)} = \frac{4}{b^2}.\int cos(\theta)\, d\theta = \frac{4}{b^2}.sen(\theta)$$

Pelo nosso diagrama, podemos escrever o $sen(\theta)$ em função das distâncias. Assim, obtemos:

$$\int \frac{1}{\left[x^2 + \frac{b^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{4}{b^2}.\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}}}$$

Agora podemos voltar ao problema original e aplicar os limites:

$$E_\lambda = \frac{K.\lambda.b}{2}.\left[\frac{4}{b^2}.\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{b^2}{4}}}\right]\Bigg|_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{K.\lambda.b}{2}.\frac{4}{b^2}.\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+\frac{b^2}{4}}}\right]\Bigg|_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{K.\lambda.b}{2}.\frac{4}{b^2}.2.\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}}$$

O problema agora será organizar os termos, vamos com calma:

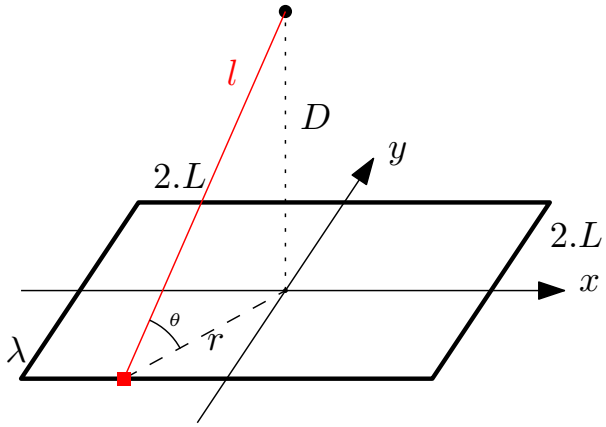
$$E_\lambda = K.\lambda.\frac{1}{b}.2.\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}} = K.\lambda.\frac{a}{b}.4.\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{b}.\frac{\lambda}{\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+b^2}}$$

Como já discutimos anteriormente, o campo resultante será este multiplicado por 2 e é direcionado para $-\hat{y}$.

$$E = E_\lambda + E_{-\lambda} = 2.E_\lambda = \frac{a}{b}.\frac{2.\lambda}{\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{E} = -\frac{a}{b}.\frac{2.\lambda}{\pi.\varepsilon_0.\sqrt{a^2+b^2}}\ \hat{y}$$

3.6 Espira quadrada uniformemente carregada



Como a densidade linear do fio é positiva, o campo elétrico será repulsivo. Observe que a componente horizontal do campo elétrico gerado por cada fio da espira se cancela, de tal forma que o campo elétrico resultante é orientado para cima na direção $+\hat{z}$. Sendo assim, podemos calcular apenas o campo elétrico que aponta para $+\hat{z}$ gerado por um fio e multiplicar o resultado por 4, pois temos 4 fios formando a espira. Então, o campo elétrico gerado por uma carga infinitesimal dQ na direção $+\hat{z}$ é:

$$dE_z = \frac{dF}{|q_0|}.sen(\theta) = \frac{K.dQ}{l^2}.sen(\theta) = \frac{K.dQ}{l^2}.\frac{D}{l} = \frac{K.D.dQ}{l^3}$$

Agora podemos escrever a carga em função da densidade linear de cargas da espira:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \Rightarrow dQ = \lambda.dx$$

A distância entre a carga infinitesimal e o ponto P pode ser reescrita também usando o Teorema de Pitágoras duas vezes:

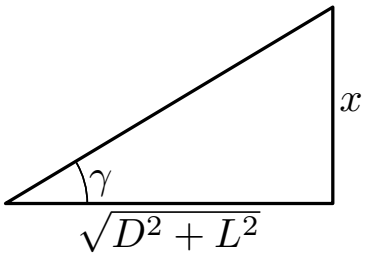
$$l^2 = D^2 + r^2 = D^2 + L^2 + x^2 \Rightarrow l = \sqrt{D^2 + L^2 + x^2}$$

Substituindo ambos os resultados, obtemos:

$$dE_z = \frac{K.D.\lambda.dx}{(D^2 + L^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = K.D.\lambda.\frac{dx}{(D^2 + L^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, para obtermos o campo elétrico total gerado por 1 fio nesta direção iremos integrar de $-L$ à L.

$$E_z = \int_{-L}^{L} K.D.\lambda.\frac{dx}{(D^2 + L^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = K.D.\lambda.\int_{-L}^{L} \frac{1}{(D^2 + L^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$



Usaremos a mesma técnica do Problema anterior para fazer essa integração. Faremos:

$x = \sqrt{D^2 + L^2}.tg(\gamma)$, consequentemente, teremos

$$dx = \sqrt{D^2 + L^2}.sec^2(\gamma).d\gamma$$

Vamos apenas resolver a integral, no final retornaremos à variável original e faremos os limites.

$$\int \frac{1}{(D^2+L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx = \int \frac{1}{(D^2+L^2+(D^2+L^2).tg^2(\gamma))^{\frac{3}{2}}}.\sqrt{D^2+L^2}.sec^2(\gamma)\ d\gamma =$$

$$\int \frac{1}{(D^2+L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx = \int \frac{\sqrt{D^2+L^2}.sec^2(\gamma)}{(D^2+L^2)^{\frac{3}{2}}.[1+tg^2(\gamma)]^{\frac{3}{2}}}\ d\gamma = \frac{1}{D^2+L^2}.\int \frac{sec^2(\gamma)}{sec^3(\gamma)}\ d\gamma$$

$$\int \frac{1}{(D^2+L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx = \frac{1}{D^2+L^2}.\int cos(\gamma)\ d\gamma = \frac{1}{D^2+L^2}.sen(\gamma)$$

Com a Trigonometria, podemos voltar à variável original:

$$\int \frac{1}{(D^2+L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx = \frac{1}{D^2+L^2}.\frac{x}{\sqrt{D^2+L^2+x^2}}$$

Agora vamos retornar ao nosso problema inicial substituindo os limites de integração:

$$E_z = K.D.\lambda.\int_{-L}^{L} \frac{1}{(D^2+L^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx = \frac{K.D.\lambda}{D^2+L^2}.\left[\frac{x}{\sqrt{D^2+L^2+x^2}}\right]\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$E_z = \frac{K.D.\lambda}{D^2+L^2}.\frac{2.L}{\sqrt{D^2+L^2+L^2}} = \frac{K.D.\lambda}{D^2+L^2}.\frac{2.L}{\sqrt{D^2+2.L^2}}$$

Como temos um total de 4 fios idênticos, obtemos que o módulo do campo resultante é:

$$E = 4.E_\lambda = 4.\frac{K.D.\lambda}{D^2+L^2}.\frac{2.L}{\sqrt{D^2+2.L^2}} = 4.\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}\frac{D.\lambda}{D^2+L^2}.\frac{2.L}{\sqrt{D^2+2.L^2}}$$

$$E = \frac{2.\lambda.L.D}{\pi.\varepsilon_0.(D^2+L^2).\sqrt{D^2+2.L^2}}$$

E vetorialmente, como já discutimos, teremos:

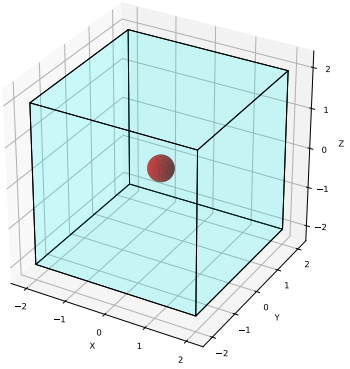
$$\vec{E} = \frac{2.\lambda.L.D}{\pi.\varepsilon_0.(D^2+L^2).\sqrt{D^2+2.L^2}}\ \hat{z}$$

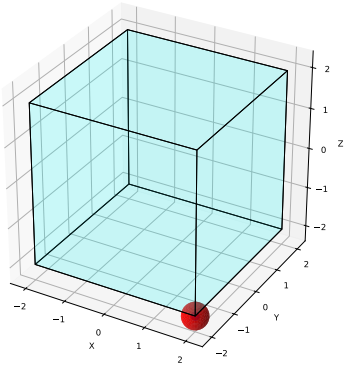
3.7 Fluxo de carga puntiforme

Da Lei de Gauss, sabemos que o fluxo do campo elétrico, independente da superfície, sempre é:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Vamos aplicar essa ideia em cada caso e, olhando para a simetria, argumentar quanto cada superfície contribui para o fluxo total.





a Com carga no centro de um cubo

Lembre que o campo elétrico gerado por uma carga pontual é radial. Como a carga está no centro do cubo, todas as faces serão atravessadas pelo campo elétrico, tendo um total de 6 superfícies.

$$\phi = \frac{\Phi}{6} = \frac{q}{6.\varepsilon_0}$$

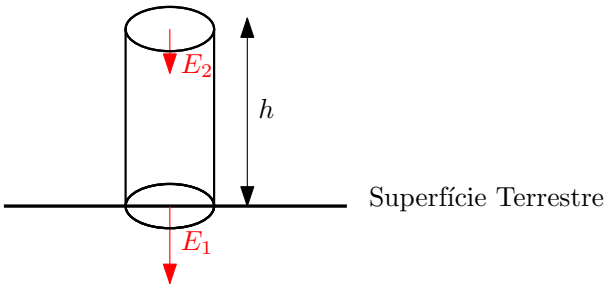
b Com carga no vértice do cubo

Neste caso, ao invés da carga interna à superfície ser a carga q, teremos na verdade apenas $\frac{q}{8}$, e como as linhas de campo elétrico são radiais, as 3 faces com aquele vértice em comum não terão linhas de campo atravessando-as, ou seja, não contribuirão para o fluxo. Sendo assim, teremos apenas 3 das 6 faces contribuindo ao fluxo. Logo, o fluxo por superfície é:

$$\phi = \frac{\Phi}{3} = \frac{\frac{q}{8}}{3.\varepsilon_0} = \frac{q}{24.\varepsilon_0}$$

Para os mais curiosos, no artigo ⟨https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0120⟩, o problema é tratado de forma muito interessante.

3.8 Densidade média de carga na atmosfera



Sabemos o fluxo nas superfícies superior (2) e inferior (1) usando a Lei de Gauss:

$$\Phi_1 = \oint \vec{E_1} \cdot d\vec{A} = E_1.A$$

$$\Phi_2 = \oint \vec{E_2} \cdot d\vec{A} = -E_2.A$$

Lembre que quando a superfície é fechada, o vetor normal $\hat{n}$ adotado é o que aponta para fora.

Sabemos que o fluxo total deve ser proporcional à carga dentro da superfície:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Podemos expressar a carga interna em função da densidade volumétrica:

$$\rho = \frac{q_{int}}{V} \Rightarrow q_{int} = \rho.V = \rho.A.h$$

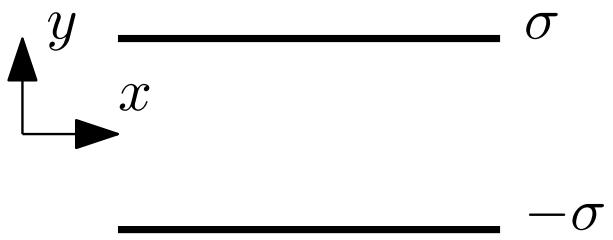
Sendo assim, obtemos:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\rho.A.h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1.A - E_2.A = \frac{\rho.A.h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \frac{\varepsilon_0}{h}.(E_1 - E_2)$$

Substituindo os valores:

$$\rho = \frac{8,85.10^{-12}}{1400}.(300 - 20) = 1,8.10^{-12}\ \frac{C}{m^3}$$

3.9 Campo elétrico gerado por par de placas uniformemente carregadas



Lembre que para placas grandes ou em regiões próximas à superfície, o campo elétrico será dado por:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\ \hat{n}$$

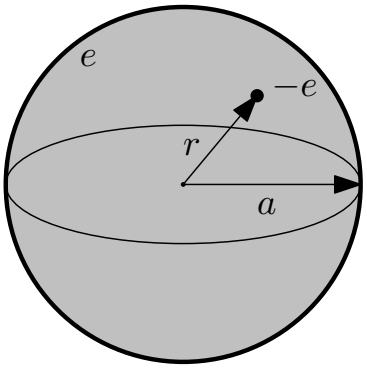
Perceba que em cima e em baixo teremos:

$$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\ \hat{y} - \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\ \hat{y} = \vec{0}$$

Já para pontos entre as placas teremos:

$$\vec{E} = \vec{E}_\sigma + \vec{E}_{-\sigma} = -\frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\ \hat{y} - \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\ \hat{y} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \hat{y}$$

3.10 O átomo de Hidrogênio segundo J. J. Thomson



a Campo elétrico sobre o elétron

Simplesmente aplicamos a Lei de Gauss sendo a Gaussiana uma superfície esférica de raio arbitrário r. Assim, obtemos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Como o campo elétrico é radial, a integral de superfície dará simplesmente $E.A$. Podemos também expressar a carga interna em função da densidade volumétrica, obtemos assim:

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{q_{int}}{v} \Rightarrow q_{int} = \frac{e}{V}.v$$

Sendo V o volume total e v o volume da esfera gaussiana de raio r:

$$q_{int} = \frac{e}{\frac{4}{3}.\pi.a^3}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow q_{int} = \frac{r^3}{a^3}.e$$

Voltando à integral, temos:

$$E.A = \frac{r^3}{a^3}.\frac{e}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.4.\pi.r^2 = \frac{r^3}{a^3}.\frac{e}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e}{a^3}.r$$

b Movimento Harmônico Simples associado ao elétron

Como já temos o campo elétrico, a força pode ser facilmente calculada:

$$E = \frac{F}{|q_0|} \Rightarrow F = E.|q_0| = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{a^3}.r$$

Como a força é de atração (a carga da esfera é positiva e o elétron tem carga negativa), a força, vetorialmente, é do tipo $-k.r\ \hat{r}$, ou seja, tem a mesma forma da força elástica. Portanto, o elétron oscilará num movimento harmônico simples. Sabemos a "constante da mola"associada ao movimento do elétron. Portanto, a frequência angular é:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{a^3}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m.a^3}} = \frac{e}{\sqrt{4.\pi.\varepsilon_0.m.a^3}}$$

c Frequência de oscilação do elétron

Sabemos a "constante da mola"associada ao movimento do elétron. Portanto, a frequência de oscilação é:

Lembre que a frequência angular e a frequência se relacionam a partir de uma equação simples:

$$\omega = 2.\pi.\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2.\pi} = \frac{\frac{e}{\sqrt{4.\pi.\varepsilon_0.m.a^3}}}{2.\pi} = \frac{e}{2.\pi.\sqrt{4.\pi.\varepsilon_0.m.a^3}} = \frac{e}{\sqrt{16.\pi^3.\varepsilon_0.m.a^3}}$$

Agora temos apenas que substituir os valores:

$$\nu = \frac{1,6.10^{-19}}{\sqrt{16.\pi^3.8,85.10^{-12}.9,11.10^{-31}.(10^{-10})^3}} = 2,5.10^{-15}\ Hz$$

3.11 Revisando a álgebra vetorial

Sendo $\vec{c} = c_x\ \hat{x} + c_y\ \hat{y} + c_z\ \hat{z}$ um vetor constante e $\vec{r} = x\ \hat{x} + y\ \hat{y} + z\ \hat{z}$ o vetor posição, o produto vetorial é dado por:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ c_x & c_y & c_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Tirando o determinante, obtemos:

$$\vec{c} \times \vec{r} = (c_y.z - c_z.y)\ \hat{x} + (c_z.x - c_x.z)\ \hat{y} + (c_x.y - c_y.x)\ \hat{z}$$

Agora aplicamos o divergente:

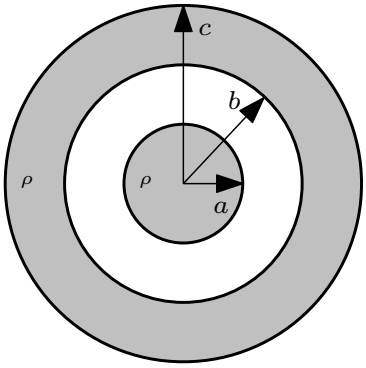
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot [(c_y.z - c_z.y)\ \hat{x} + (c_z.x - c_x.z)\ \hat{y} + (c_x.y - c_y.x)\ \hat{z}]$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}[c_y.z - c_z.y] + \frac{\partial}{\partial y}[c_z.x - c_x.z] + \frac{\partial}{\partial z}[c_x.y - c_y.x]$$

Como as componentes do vetor $\vec{c}$ são constante, elas não entram na derivada:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{c} \times \vec{r}) = c_y.\frac{\partial}{\partial x}z - c_z.\frac{\partial}{\partial x}y + c_z.\frac{\partial}{\partial y}x - c_x.\frac{\partial}{\partial y}z + c_x.\frac{\partial}{\partial z}y - c_y.\frac{\partial}{\partial z}x = 0$$

3.12 Casca esférica uniformemente carregada



O nosso trabalho será aplicar a lei de Gauss

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Em cada região, sempre analisando a carga contida dentro da superfície gaussiana esférica. Como o campo elétrico sempre será paralelo à normal à superfície gaussiana, teremos:

$$E.A = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{int}}{A.\varepsilon_0}$$

a $0 \leq r \leq a$

A carga interna será obtida com a definição de densidade volumétrica de carga:

$$\rho = \frac{q_{int}}{v} \Rightarrow q_{int} = \rho.v = \rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3$$

A área da superfície é:

$$A = 4.\pi.r^2$$

Portanto, o campo elétrico é:

$$E_1 = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3}{4.\pi.r^2.\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.r$$

b $a \leq r \leq b$

Agora, a carga dentro da superfície é a carga total contida na esfera de raio a:

$$\rho = \frac{q_{int}}{v} \Rightarrow q_{int} = \rho.v = \rho.\frac{4}{3}.\pi.a^3$$

E a área da superfície é:

$$A = 4.\pi.r^2$$

Logo, o campo elétrico:

$$E_2 = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.a^3}{4.\pi.r^2.\varepsilon_0} = \frac{\rho.a^3}{3.\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}$$

c $b \leq r \leq c$

A carga dentro da superfície é a carga total da esfera de raio a somada à carga contida na casca esférica de raio interno b:

$$q_{int} = \rho.v_a + \rho.v_b = \rho.\frac{4}{3}.\pi.a^3 + \rho.\frac{4}{3}.\pi.(r^3 - b^3) = \frac{4}{3}.\pi.\rho.(r^3 + a^3 - b^3)$$

E a área da superfície é, novamente:

$$A = 4.\pi.r^2$$

Assim, o campo elétrico nesta região é:

$$E_3 = \frac{\frac{4}{3}.\pi.\rho.(r^3 + a^3 - b^3)}{4.\pi.r^2.\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.\left[\frac{r^3 + a^3 - b^3}{r^2}\right]$$

d $c \leq r$

Agora a carga contida dentro da superfície é a carga total contida na esfera e na casca esférica:

$$q_{int} = \rho.v_a + \rho.v_b = \rho.\frac{4}{3}.\pi.a^3 + \rho.\frac{4}{3}.\pi.(c^3 - b^3) = \frac{4}{3}.\pi.\rho.(c^3 + a^3 - b^3)$$

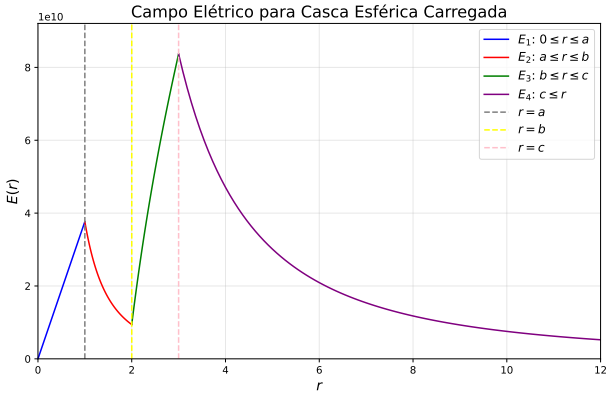
A área da superfície é, como já vimos:

$$A = 4.\pi.r^2$$

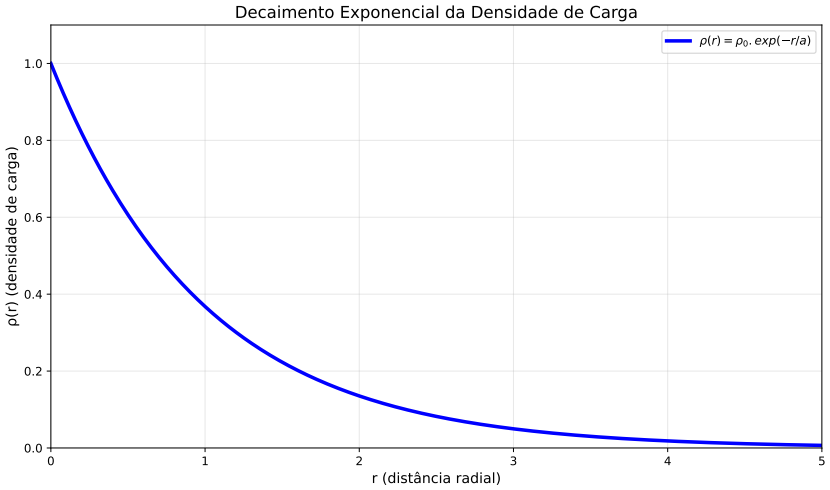
Finalmente, o campo elétrico da ultima região é:

$$E_4 = \frac{\frac{4}{3}.\pi.\rho.(c^3 + a^3 - b^3)}{4.\pi.r^2.\varepsilon_0} = \frac{\rho.(c^3 + a^3 - b^3)}{3.\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}$$

Com as 4 equações podemos plotar o gráfico e observar o comportamento em cada região:



3.13 Densidade de carga que varia exponencialmente



a Carga total da distribuição

A partir da definição de densidade volumétrica de carga, temos:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho.dV = \rho_0.e^{-\frac{r}{a}}.dV$$

Como a distribuição é esfericamente simétrica, integraremos no volume de uma esfera:

$$dQ = \rho_0.e^{-\frac{r}{a}}.4.\pi.r^2.dr = 4.\pi.\rho_0.r^2.e^{-\frac{r}{a}}.dr$$

Agora integramos em todo o espaço para descobrir a carga total:

$$Q = \int_0^\infty 4.\pi.\rho_0.r^2.e^{-\frac{r}{a}}\ dr = 4.\pi.\rho_0.\int_0^\infty r^2.e^{-\frac{r}{a}}\ dr$$

Teremos que usar mais uma técnica de integração para obter o resultado desta integração: a integração por partes. Com ela, temos:

$$\int_a^b f(x)\ dg(x) = f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\ df(x)$$

Como o termo r^2 está nos atrapalhando, ele será nossa "$f(x)$", pois ele será derivado. Então, aplicando a primeira integração por partes:

$$f(r) = r^2 \Rightarrow df(r) = 2.r.dr$$

$$dg(r) = e^{-\frac{r}{a}}.dr \Rightarrow g(r) = \int e^{-\frac{r}{a}}\ dr = -a.e^{-\frac{r}{a}}$$

Assim, obtemos:

$$Q = 4.\pi.\rho_0.\left[-r^2.a.e^{-\frac{r}{a}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2.a.r.e^{-\frac{r}{a}}\,dr\right] = 4.\pi.\rho_0.\left[-r^2.a.e^{-\frac{r}{a}}\Big|_0^\infty + 2.a.\int_0^\infty r.e^{-\frac{r}{a}}\,dr\right]$$

Perceba que o problema para integrar ainda persiste, então teremos que aplicar a integração por partes novamente:

$$f(r) = r \Rightarrow df(r) = dr$$

$$dg(r) = e^{-\frac{r}{a}}.dr \Rightarrow g(r) = \int e^{-\frac{r}{a}}\,dr = -a.e^{-\frac{r}{a}}$$

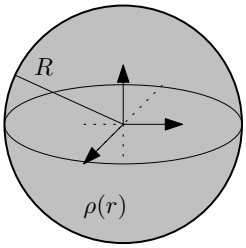
Aplicando a substituição:

$$Q = 4.\pi.\rho_0.\left[-r^2.a.e^{-\frac{r}{a}}\Big|_0^\infty + 2.a.\left(-r.a.e^{-\frac{r}{a}}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty a.e^{-\frac{r}{a}}\,dr\right)\right]$$

A integral que restou agora é simples. Perceba que os termos que surgiram em função da integração por partes são ambos nulos, tendo em vista que em $r = 0$ são nulos e em $r \to \infty$ também. Portanto, a carga total é:

$$Q = 4.\pi.\rho_0.2.a^2.\int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}}\,dr = 8.\pi.a^2\rho_0.[-a.e^{-\frac{r}{a}}]\Big|_0^\infty = 8.\pi.\rho_0.a^3$$

b Campo elétrico em qualquer ponto



Vamos aplicar a Lei de Gauss sendo a superfície gaussiana uma superfície de raio R centrada na origem.

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

A carga interna pode ser expressa em função da densidade volumétrica:

$$\rho = \frac{dq_{int}}{dv} \Rightarrow dq_{int} = \rho.dv \Rightarrow q_{int} = \int_0^R \rho\,dv = \int_0^R \rho_0.e^{-\frac{r}{a}}4.\pi.r^2\,dr = 4.\pi.\rho_0.\int_0^R r^2.e^{-\frac{r}{a}}\,dr$$

Perceba que essa a mesma integral que fizemos no item ***a***, mas não vamos até o infinito, e sim até o raio R. Por isso, podemos aproveitar o resultado obtido anteriormente:

$$q_{int} = 4.\pi.\rho_0.\left[-r^2.a.e^{-\frac{r}{a}}\Big|_0^R + 2.a.\left(-r.a.e^{-\frac{r}{a}}\Big|_0^R - a^2.e^{-\frac{r}{a}}\Big|_0^R\right)\right]$$

$$q_{int} = 4.\pi.\rho_0.\left[-R^2.a.e^{-\frac{R}{a}} + 2.a.\left(-R.a.e^{-\frac{R}{a}} - a^2.(e^{-\frac{R}{a}} - 1)\right)\right]$$

Como $\vec{E}$ e $\hat{n}$ são paralelos, a integral do campo elétrico será simplesmente $E.A$. Portanto, teremos:

$$E.A = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.4.\pi.R^2 = \frac{4.\pi.\rho_0}{\varepsilon_0}.\left[- R^2.a.e^{-\frac{R}{a}} + 2.a.\left(- R.a.e^{-\frac{R}{a}} - a^2.(e^{-\frac{R}{a}} - 1)\right)\right]$$

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0.R^2}.\left[- R^2.a.e^{-\frac{R}{a}} + 2.a.\left(- R.a.e^{-\frac{R}{a}} - a^2.(e^{-\frac{R}{a}} - 1)\right)\right]$$

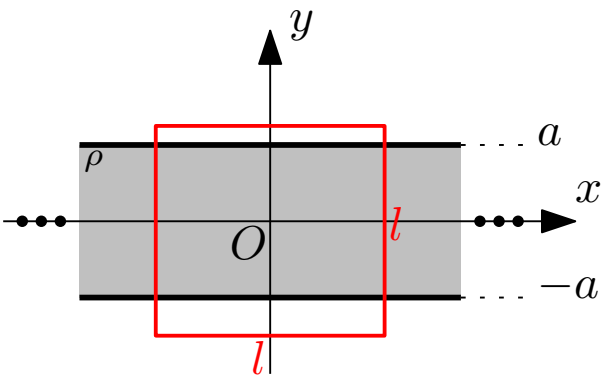
$$E = \frac{2.\rho_0.a}{\varepsilon_0.R^2}.\left[\frac{-R^2.e^{-\frac{R}{a}}}{2} + \left(- R.a.e^{-\frac{R}{a}} - a^2.(e^{-\frac{R}{a}} - 1)\right)\right]$$

$$E = \frac{2.\rho_0.a}{\varepsilon_0.R^2}.\left[\frac{-R^2.e^{-\frac{R}{a}}}{2} - R.a.e^{-\frac{R}{a}} - a^2.e^{-\frac{R}{a}} + a^2\right] = \frac{2.\rho_0.a^3}{\varepsilon_0.R^2}.\left[\frac{-R^2.e^{-\frac{R}{a}}}{2.a^2} - \frac{R.e^{-\frac{R}{a}}}{a} - e^{-\frac{R}{a}} + 1\right]$$

$$E = \frac{2.\rho_0.a^3}{\varepsilon_0.R^2}.\left[1 - \left(\frac{R^2}{2.a^2} + \frac{R}{a} + 1\right).e^{-\frac{R}{a}}\right] = \frac{2.\rho_0.a^3}{\varepsilon_0.R^2}.\left[1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{R^2}{a^2} + 2.\frac{R}{a} + 2\right).e^{-\frac{R}{a}}\right]$$

3.14 Camada carregada infinita

a Campo elétrico acima, dentro e abaixo da camada



Perceba que a distribuição é simétrica, ou seja, os campos gerados por ela em cima e em baixo da camada são iguais. Assim, podemos usar uma superfície gaussiana cúbica, pois os campos elétricos apontarão para $\pm\hat{y}$, respectivamente. Então, obtemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Apenas as tampas superior e inferior do cubo não retornarão um produto escalar nulo com o campo elétrico.

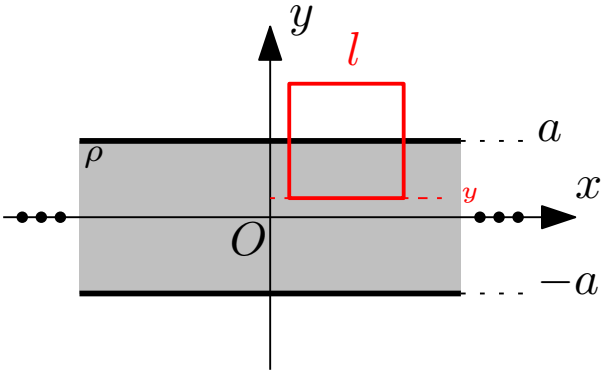
$$2.E.A = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{int}}{2.A.\varepsilon_0} = \frac{q_{int}}{2.l^2.\varepsilon_0}$$

Podemos escrever a carga contida dentro da superfície em função da densidade volumétrica de carga:

$$\rho = \frac{q_{int}}{V} \Rightarrow q_{int} = \rho.V = \rho.2.a.l^2$$

Sendo assim, o campo externo gerado pela distribuição é:

$$E = \frac{\rho.2.a.l^2}{2.l^2.\varepsilon_0} = \frac{\rho.a}{\varepsilon_0}$$



Agora podemos aplicar novamente a Lei de Gauss, mas o cubo agora terá lado $l < a$, e sua superfície inferior distará y do centro da camada.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Novamente, os produtos escalares que não serão nulos são os que envolvem as tampas superior e inferior do cubo. Porém, não há nada que justifique que os campos interno e externo devem ser iguais, então chamaremos o campo elétrico externo (já calculado!) de $\vec{E}$ e o interno será $\vec{E}_i$. Assim, obtemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} + \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = E.A + E_i.A = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

A carga contida na superfície é:

$$\rho = \frac{q_{int}}{V} \Rightarrow q_{int} = \rho.V = \rho.A.(a-y) =$$

Retornando ao resultando obtido pela Lei de Gauss:

$$E.A + E_i.A = \frac{\rho.A.(a-y)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E + E_i = \frac{\rho.(a-y)}{\varepsilon_0}$$

Como já sabemos o valor de E, podemos substituí-lo e isolar o campo elétrico interno:

$$\frac{\rho.a}{\varepsilon_0} + E_i = \frac{\rho.(a-y)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_i = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.y$$

O sinal negativo nos diz simplesmente que o vetor normal à tampa inferior do cubo e o vetor $\vec{E}_i$ são antiparalelos. Portanto, o módulo do campo elétrico interno é:

$$E_i = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.y$$

De forma vetorial, os campos elétricos serão:

$$\vec{E} = \pm\frac{\rho.a}{\varepsilon_0}\ \hat{y} \text{ e } \vec{E}_i = \frac{\rho.y}{\varepsilon_0}\ \hat{y}$$

b Verificando a Equação de Poisson

A equação de Poisson afirma que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Região externa

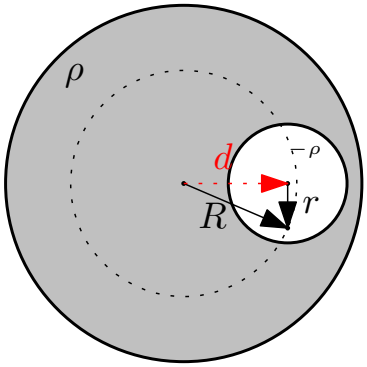
  O campo elétrico externo é constante, logo seu divergente é nulo. Portanto, obtemos $\rho = 0$. De fato, a densidade de carga fora da camada é nula!

- Região interna

  O campo elétrico interno varia linearmente com y, logo seu divergente é constante e igual a $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Portanto, obtemos que, de fato, $\rho = \rho$.

Então os campos elétricos interno e externo satisfazem a equação de Poisson.

3.15 Campo elétrico em cavidade no interior de esfera uniformemente carregada



Na região em que há cavidade, a carga é nula. Assim, podemos imaginar uma esfera maciça com densidade volumétrica de carga positiva e onda há a cavidade, temos uma esfera de densidade volumétrica de carga negativa, assim a densidade líquida seria $\rho - \rho = 0$.
Agora, traçando uma gaussiana de raio arbitrário R que passa pela cavidade, podemos descobrir o valor do campo elétrico dentro da mesma. O campo elétrico resultante será a superposição dos campos elétricos gerados pelas distribuições de carga no ponto.

Vamos primeiro descobrir o campo elétrico gerado pela esfera de densidade ρ:

$$\vec{E}_\rho \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_\rho.A = \frac{\rho.V}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_\rho = \frac{\rho.V}{A.\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.R^3}{4.\pi.R^2.\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.R$$

Como a distribuição é uniforme, vetorialmente, teremos:

$$\vec{E}_\rho = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.\vec{R}$$

E o campo elétrico gerado pela distribuição negativa é:

$$\vec{E}_{-\rho} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow -E_\rho.a = \frac{\rho.v}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_\rho = -\frac{\rho.v}{a.\varepsilon_0} = -\frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3}{4.\pi.r^2.\varepsilon_0} = -\frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.r$$

Como a distribuição é também uniforme, vetorialmente, teremos:

$$\vec{E}_{-\rho} = -\frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.\vec{r}$$

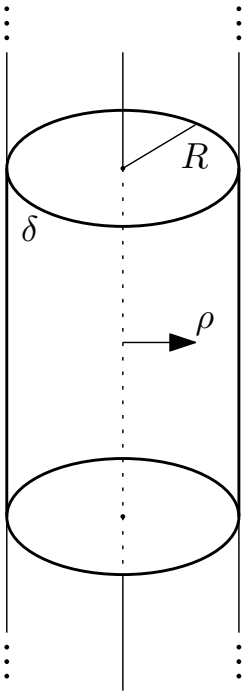
Agora, finalmente somamos os resultados para obter o campo resultante em ponto qualquer dentro da cavidade:

$$\vec{E} = \vec{E}_\rho + \vec{E}_{-\rho} = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.\vec{R} - \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.\vec{r} = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.[\vec{R} - \vec{r}] = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.\vec{d}$$

Concluímos assim que o vetor campo elétrico dentro da cavidade é constante!

3.16 Cilindro longo uniformemente carregado

a Comportamento do campo elétrico gerado



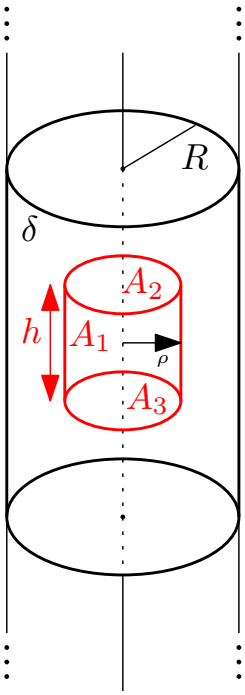
Como o cilindro tem altura infinita, o campo elétrico gerado pelo mesmo não pode variar com a altura z. Um ponto à uma altura z sempre estará no "meio"do cilindro, pois ele é infinito.
Se a densidade é uniforme, também não deve haver variação de campo elétrico com respeito ao ângulo ϕ, isso porque não importa a posição angular do ponto, sempre haverá a mesma quantidade de carga interagindo com a carga de prova.
Por fim, deveremos ter um campo elétrico que varia apenas com a distância ρ, pois esta é a única dimensão que ao ser movida, fará mudar a interação entre a carga de prova e a distribuição de carga do cilindro.

$$E = E(\rho)$$

Sobre a direção e sentido do campo gerado, pense no cilindro como sendo simplesmente um fio com raio maior, fazendo assim a "largura"não poder mais ser desprezada. Logo, assim como no fio, a distribuição de carga do cilindro gerará um campo elétrico que aponta na direção radial $\hat{\rho}$.

$$\vec{E} = E(\rho)\ \hat{\rho}$$

b Campo elétrico dentro do cilindro



Estamos lidando com um cilindro, então não há nada mais conveniente que usar uma superfície gaussiana cilíndrica. Dividiremos o cilindro em 3 partes: superfície lateral (1), tampa superior (2) e tampa inferior (3). Aplicando a Lei de Gauss, obtemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 + \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_2 + \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Perceba que o campo elétrico é perpendicular às áreas 2 e 3, e paralelo à área 1. Por isso, apenas a integral que envolve a área lateral não será nula.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = E.A_1 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{A_1}.\frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2.\pi.\rho.h}.\frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

A carga interna ao cilindro pode ser escrita em função da densidade volumétrica δ:

$$\delta = \frac{q_{int}}{v} \Rightarrow q_{int} = \delta.v = \delta.\pi.\rho^2.h$$

Com isso, já podemos obter o módulo do campo elétrico apenas com variáveis conhecidas:

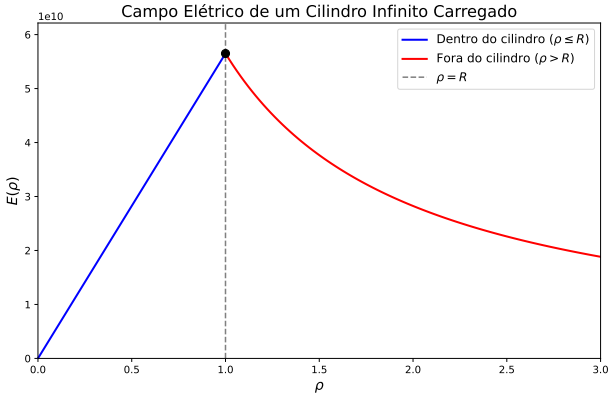
$$E(\rho) = \frac{1}{2.\pi.\rho.h}.\frac{\delta.\pi.\rho^2.h}{\varepsilon_0} = \frac{\delta}{2.\varepsilon_0}.\rho$$

c Gráfico do campo elétrico em função do raio ρ

Para uma descrição completo, precisamos descobrir o campo elétrico fora do cilindro ($\rho > R$). Aplicando a Lei de Gauss, teremos novamente apenas a área lateral da superfície gaussiana cilíndrica não-nula no produto interno com o campo elétrico. Logo, obtemos:

$$E.A_1 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\delta.v}{\varepsilon_0} = \frac{\delta.\pi.R^2.h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.2.\pi.\rho.h = \frac{\delta.\pi.R^2.h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\delta.R^2}{2.\varepsilon_0}.\frac{1}{\rho}$$

Então, obtemos:



CAPÍTULO

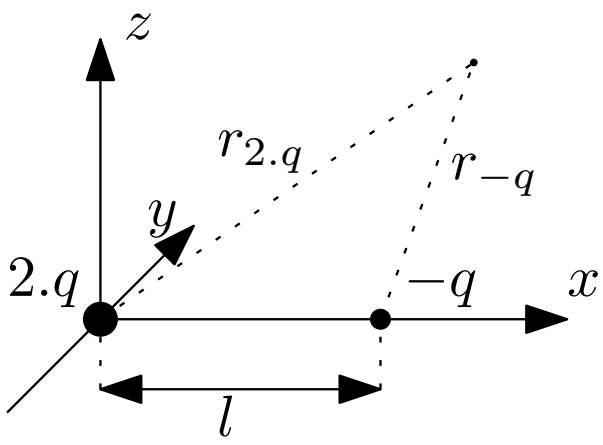
4

O POTENCIAL ELETROSTÁTICO

"O tempo é a imagem móvel da eternidade imóvel. Tudo flui e nada permanece; não podemos banhar-nos duas vezes no mesmo rio, porque novas águas correm sobre nós."

Platão

4.1 A superfície equipotencial



Para determinar o potencial eletrostático em um ponto $P = (x, y, z)$ arbitrário, podemos usar a superposição. Assim, o potencial eletrostático resultante será a soma dos potenciais eletrostáticos gerados por cada carga.

$$V = V_{2.q} + V_{-q} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{2.q}{r_{2.q}} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{-q}{r_{-q}} = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left[\frac{2}{r_{2.q}} - \frac{1}{r_{-q}}\right]$$

Queremos saber a superfície equipotencial de potencial eletrostático nulo, ou seja, $V = 0\ V$. Então:

$$0 = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left[\frac{2}{r_{2.q}} - \frac{1}{r_{-q}}\right] \Rightarrow 2.r_{-q} = r_{2.q}$$

A distâncias podem ser determinadas usando oque sabemos da Geometria Analítica:

$$r_{2.q} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_{-q} = \sqrt{(x-l)^2 + y^2 + z^2}$$

Nosso trabalho agora será manipular algebricamente esta equação:

$$2.\sqrt{(x-l)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow 4.[(x-l)^2 + y^2 + z^2] = x^2 + y^2 + z^2$$

$$4.[x^2 + l^2 - 2.x.l + y^2 + z^2] = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 4.x^2 + 4.l^2 - 8.x.l + 4.y^2 + 4.z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$3.x^2 + 4.l^2 - 8.x.l + 3.y^2 + 3.z^2 = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{3}.l^2 - \frac{8}{3}.x.l + y^2 + z^2 = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{8}{3}.x.l\right) + y^2 + z^2 = -\frac{4}{3}.l^2$$

Olhando para o termo entre parênteses, devemos lembrar de um conhecido produto notável:

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b$$

Claramente, temos $a = x$. A relação com o termo misto pode facilmente determinada também:

$$-2.a.b = -\frac{8}{3}.x.l \Rightarrow -2.x.b = -\frac{8}{3}.x.l \Rightarrow b = \frac{4}{3}.l$$

Portanto, podemos somar b^2 de ambos os lados da equação, assim conseguiremos usar o produto notável:

$$\left(x^2 - \frac{8}{3}.x.l + \left[\frac{4}{3}.l\right]^2\right) + y^2 + z^2 = -\frac{4}{3}.l^2 + \left[\frac{4}{3}.l\right]^2$$

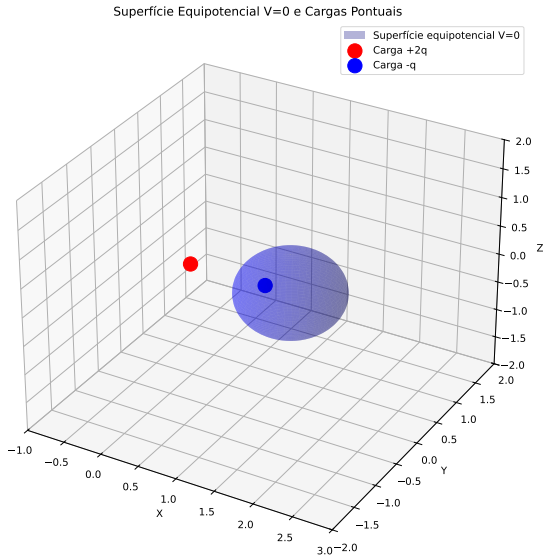
$$\left(x^2 - \frac{8}{3}.x.l + \frac{16}{9}.l^2\right) + y^2 + z^2 = -\frac{4}{3}.l^2 + \frac{16}{9}.l^2$$

$$\left(x - \frac{4}{3}.l\right)^2 + y^2 + z^2 = -\frac{4}{3}.l^2 + \frac{16}{9}.l^2 = -\frac{12}{9}.l^2 + \frac{16}{9}.l^2 = \frac{16-12}{9}.l^2 = \frac{4}{9}.l^2 = \left[\frac{2}{3}.l\right]^2$$

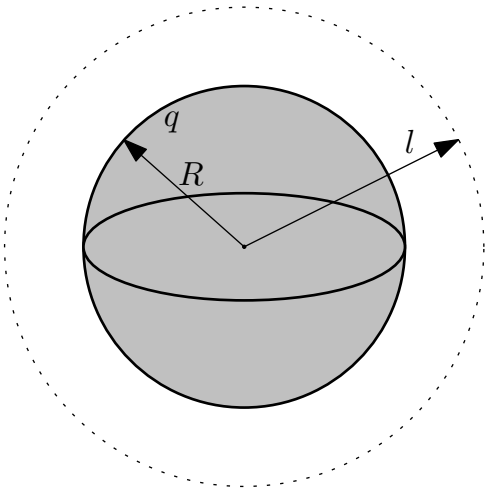
Portanto, a equação que descreve a superfície com potencial nulo é:

$$\left(x - \frac{4}{3}.l\right)^2 + y^2 + z^2 = \left[\frac{2}{3}.l\right]^2$$

Uma esfera centrada em $\frac{4}{3}.l$ e com raio $\frac{2}{3}.l$.



4.2 Potencial de esfera uniformemente carregada



a Potencial interno e externo à esfera

Temos uma clara relação vetorial entre o potencial eletrostático e o campo eletrostático:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Lembre-se que, como calculamos nos problemas do capítulo anterior, os campos eletrostáticos interno e externo serão:

$$\vec{E}_{in} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R^3}.r\ \hat{r}$$

$$\vec{E}_{out} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}\ \hat{r}$$

Ambos são radiais, então o gradiente de V só pode ter a componente radial. Isso implica em:

$$\vec{E} = -\frac{d}{dr}V\ \hat{r} \Rightarrow E = -\frac{d}{dr}V \Rightarrow dV = -E\ dr$$

Recorde-se que definimos o potencial eletrostático no infinito como sendo nulo. Portanto, em um ponto l do espaço, o potencial será:

$$V = -\int_{\infty}^{l} E\ dr$$

Para o potencial externo, integramos o campo elétrico vindo do infinito até um ponto l **fora** da esfera. Como não há mudança no comportamento do campo elétrico, simplesmente teremos:

$$V_{out} = -\int_{\infty}^{l} E_{out}\ dr = -\int_{\infty}^{l} \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}\ dr = -\frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\int_{\infty}^{l}\frac{1}{r^2}\ dr = -\frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_{\infty}^{l}$$

$$V_{out} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{l}$$

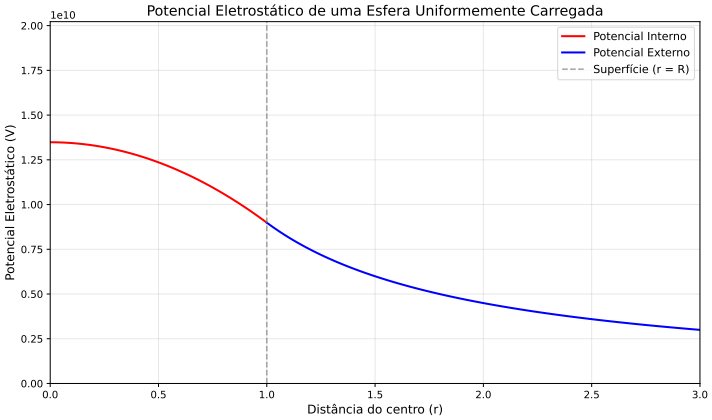
Para o potencial no interior da esfera, perceba que há uma mudança no comportamento do campo elétrico. Assim, teremos que considerar essa mudança no momento da integração:

$$V_{in} = -\int_{\infty}^{l} E\ dr = -\int_{\infty}^{R} E_{out}\ dr - \int_{R}^{l} E_{in}\ dr = -\int_{\infty}^{R} \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}\ dr - \int_{R}^{l} \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R^3}.r\ dr$$

$$V_{in} = -\frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r^2}\,dr - \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R^3}.\int_{R}^{l} r\,dr = -\frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left[-\frac{1}{r}\right]\Bigg|_{\infty}^{R} - \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R^3}.\left[\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_{R}^{l}$$

$$V_{in} = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{1}{R} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R^3}.\frac{R^2-l^2}{2} = \frac{q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{1}{R} + \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R} - \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R^3}.l^2$$

$$V_{in} = \frac{q}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{3}{R} - \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R^3}.l^2 = \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R}.\left[3 - \frac{l^2}{R^2}\right]$$



b Aplicando o modelo para o átomo de hidrogênio

Aplicando a Lei de Gauss para a região exterior, teremos $E_{out} = 0$, pois as cargas dentro da superfície gaussiana se anulam $(e - e = 0)$. Assim, o potencial eletrostático também se anula. Logo:

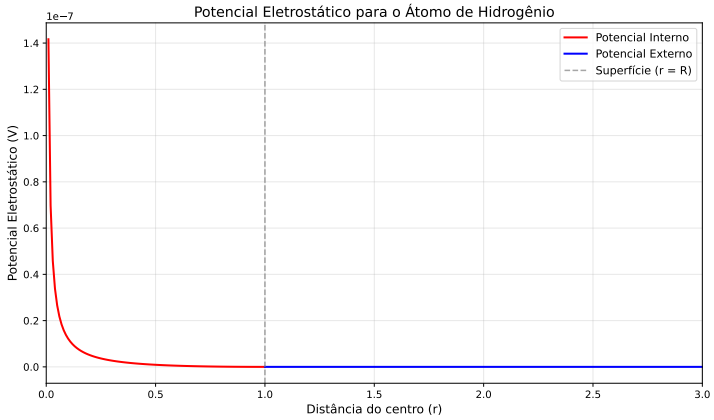
$$V_{out} = 0$$

Para o potencial interno, podemos usar a ideia de superposição. Perceba que o potencial resultante dentro da esfera será a soma do potencial gerado pela carga pontual no centro da esfera com o potencial gerado pela carga distribuída na esfera (que calculamos no item anterior)*:

$$V_{in} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e}{l} - \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e}{R}.\left[3 - \frac{l^2}{R^2}\right]$$

Mesmo não sendo pedido, vamos plotar esse resultado também.

*Lembre que consideramos uma carga arbitrária q, mas agora a mesma vale $-e$, pois é um elétron!


Potencial Eletrostático para o Átomo de Hidrogênio
1e−7
Potencial Interno
Potencial Externo
Superfície (r = R)
Potencial Eletrostático (V)
Distância do centro (r)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

4.3 Potencial eletrostático de carga em campo eletrostático

Vamos partir da relação entre a energia potencial (U) e o potencial eletrostático (V):

$$dU = q.dV$$

Podemos escrever dV em função do campo elétrico externo que está sendo aplicado:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E.dr = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Substituindo, obtemos:

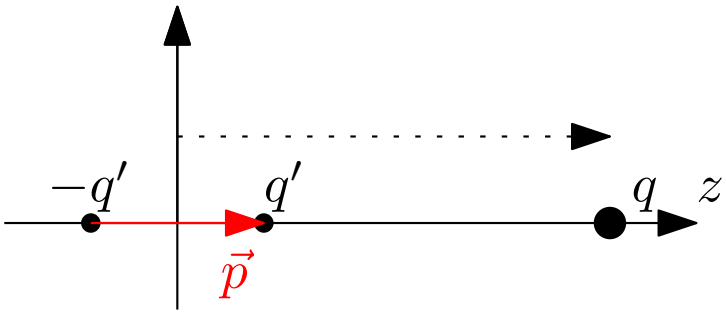
$$dU = -q.\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Como o campo eletrostático é externo, o mesmo não varia com r. Então, integrando:

$$U = \int -q.\vec{E} \cdot d\vec{r} = -q.\vec{E} \cdot \int d\vec{r} = -q.\vec{E} \cdot \vec{r} + C$$

A constante C de integração é quem nos permite escolher aonde fica o "zero"de potencial do nosso sistema.

4.4 Carga puntiforme e um dipolo



a Energia potencial da carga no campo eletrostático gerado pelo dipolo

Sabemos que a energia potencial pode ser expressa em função do potencial eletrostático com:

$$U = q.V$$

O dipolo é composto por uma carga negativa e uma carga positiva, por isso o potencial resultante gerado pelo mesmo é a superposição do potencial eletrostático gerado por cada carga separadamente. Portanto:

$$V = V_- + V_+ = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q'}{r_-} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q'}{r_+}$$

Se o dipolo tem valor p e cada carga é q', então a distância entre as cargas é:

$$p = q'.d \Rightarrow d = \frac{p}{q'}$$

Então as distâncias r_- e r_+ serão:

$$r_- = z + \frac{p}{2.q'}$$

$$r_+ = z - \frac{p}{2.q'}$$

Sendo assim, o potencial eletrostático é:

$$V = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q'}{z + \frac{p}{2.q'}} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q'}{z - \frac{p}{2.q'}} = \frac{q'}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{z - \frac{p}{2.q'}} - \frac{1}{z + \frac{p}{2.q'}}\right]$$

Simplificando o termo entre colchetes, obtemos:

$$V = \frac{q'}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left[\frac{\frac{p}{q'}}{z^2 - \frac{p^2}{4.q'^2}}\right] = \frac{p}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{z^2 - \frac{p^2}{4.q'^2}}\right]$$

Como já foi dito no enunciado, temos que $z >> \frac{p}{q'}$. Então, podemos simplificar o denominador:

$$V = \frac{p}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{1}{z^2}$$

Com isso, podemos voltar à energia potencial da carga puntiforme:

$$U = \frac{p.q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{1}{z^2}$$

b Força sobre a carga

A força pode ser expressa em função da energia potencial como:

$$\vec{F} = -\frac{d}{dz}U\ \hat{z} = -\frac{d}{dz}\left[\frac{p.q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{1}{z^2}\right]\ \hat{z} = -\frac{p.q}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z^2}\right]\ \hat{z} = \frac{1}{2.\pi.\varepsilon_0}.\frac{p.q}{z^3}\ \hat{z}$$

Substituindo os valores, obtemos numericamente a força sobre a carga pontual:

$$\vec{F} = \frac{1}{2.\pi.8,85.10^{-12}}.\frac{3,48.10^{-30}.1,6.10^{-19}}{(10.10^{-10})^3}\ \hat{z} = 1.10^{-11}\ \hat{z} = 10.10^{-12}\ \hat{z} \Rightarrow F = 10\ pN$$

4.5 Dipolos interagindo entre si

a Energia potencial de interação entre dois dipolos arbitrários

O potencial eletrostático gerado pelo dipolo 1, por exemplo, é dado por:

$$V_1 = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{\vec{p_1}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{\vec{p_1}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Com esse potencial, podemos descobrir o campo eletrostático gerado pelo dipolo 1:

$$\vec{E_1} = -\vec{\nabla}V_1 = -\vec{\nabla}\left[\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{\vec{p_1}\cdot\vec{r}}{r^3}\right] = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\vec{\nabla}\left[\frac{\vec{p_1}\cdot\vec{r}}{r^3}\right]$$

Vamos escrever os vetores em função de suas componentes como:

$$\vec{p_1} = p_{1x}\ \hat{x} + p_{1y}\ \hat{y} + p_{1z}\ \hat{z}$$

$$\vec{r} = x\ \hat{x} + y\ \hat{y} + z\ \hat{z}$$

Então o campo elétrico pode ser escrito da seguinte forma:

$$\vec{E_1} = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\vec{\nabla}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Lembre-se que o operador $\vec{\nabla}$ é:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\ \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\ \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\ \hat{z}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned}\vec{E_1} = \frac{-1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\Bigg(&\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\ \hat{x} + \\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\ \hat{y} + \\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\ \hat{z}\Bigg)\end{aligned}$$

Vamos calcular apenas a componente x, as outras serão análogas, apenas trocando o x pela outra componente. No caso desta derivada, vale a regra do quociente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{p_{1x}.(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - (p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z).\frac{3}{2}.(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.2.x}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

Agora podemos retornar à notação antiga, considerando os vetores e não mais suas componentes.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{p_{1x}.r^3 - (\vec{p}_1 \cdot \vec{r}).3.r.x}{r^6} = \frac{p_{1x}.r^3 - r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).3.x}{r^6}$$

Analogamente, as outras derivadas serão:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{p_{1y}.r^3 - r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).3.y}{r^6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p_{1x}.x + p_{1y}.y + p_{1z}.z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{p_{1z}.r^3 - r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).3.z}{r^6}$$

Portanto, o campo elétrico será:

$$\vec{E}_1 = \frac{-1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{p_{1x}.r^3 - r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).3.x}{r^6}\,\hat{x} + \frac{p_{1y}.r^3 - r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).3.y}{r^6}\,\hat{y} + \frac{p_{1z}.r^3 - r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).3.z}{r^6}\,\hat{z}\right)$$

Obtivemos o campo elétrico gerado por um dipolo, agora tentaremos deixá-lo com uma cara mais simpática:

$$\vec{E}_1 = \frac{-1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{[p_{1x}\,\hat{x} + p_{1y}\,\hat{y} + p_{1z}\,\hat{z}].r^3 - 3.r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).[x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}}{r^6}\right)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{-1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{\vec{p}_1.r^3 - 3.r^2.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).\vec{r}}{r^6}\right) = \frac{-1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{\vec{p}_1.r^3 - 3.r^3.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).\hat{r}}{r^6}\right)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{-1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{\vec{p}_1 - 3.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).\hat{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{3.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).\hat{r} - \vec{p}_1}{r^3}\right)$$

Agora, finalmente, podemos calcular a energia potencial associada à interação dos dois dipolos:

$$U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\vec{p}_2 \cdot \left[\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{3.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).\hat{r} - \vec{p}_1}{r^3}\right)\right] = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3.(\vec{p}_1 \cdot \hat{r}).(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})}{r^3}\right)$$

b Dipolos alinhados à $\vec{r}$ e paralelos ou antiparalelos

Se $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$, obtemos:

$$U_{\parallel} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{p_1.p_2}{r^3} - \frac{3.p_1.p_2}{r^3}\right) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{-2.p_1.p_2}{r^3} = \frac{-p_1.p_2}{2.\pi.\varepsilon_0.r^3}$$

Se forem anti-paralelos, por outro lado, teremos:

$$U_{anti} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(-\frac{p_1.p_2}{r^3} + \frac{3.p_1.p_2}{r^3}\right) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{-2.p_1.p_2}{r^3} = \frac{p_1.p_2}{2.\pi.\varepsilon_0.r^3}$$

c Dipolos perpendiculares à $\vec{r}$ e paralelos ou antiparalelos

Quando os dipolos são perpendiculares à $\vec{r}$ o segundo termo da energia potencial sempre será nulo. Assim, a energia potencial é:

$$U_{\perp} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{\vec{p_1}\cdot\vec{p_2}}{r^3}\right)$$

Se os dipolos estão alinhados de forma paralela ou antiparalela, teremos, respectivamente, a energia potencial positiva ou negativa.

$$U_{\perp} = \pm\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\left(\frac{p_1.p_2}{r^3}\right)$$

A condição mais favorecida energeticamente é o caso do item ***b*** em que os dipolos são antiparalelos:

$$U_{anti} = \frac{p_1.p_2}{2.\pi.\varepsilon_0.r^3}$$

d Aplicando à molécula de água

Apenas teremos que substituir os valores. Lembre-se que queremos o valor em eV e não J, por isso dividiremos a equação por e:

$$U = \frac{p^2}{2.\pi.e.\varepsilon_0.r^3} = \frac{(6,2.10^{-30})^2}{2.\pi.1,6.10^{-19}.8,85.10^{-12}.(5.10^{-10})^3} = 3,4.10^{-2}\ eV$$

4.6 Experimento de Rutherford

A menor distância que a partícula α estará dos átomos da folha de ouro é aquela que faz com que toda a energia cinética inicial seja convertida em energia potencial eletrostática. Então, por conservação de energia, teremos:

$$K = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_\alpha.q_{Au}}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_\alpha.q_{Au}}{K}$$

Em função da carga elementar e (que vale $1,6.10^{-19}\ C$), a energia cinética das partículas alfa e as cargas serão:

$$K = e.7,68.10^6\ J$$

$$q_\alpha = 2.e$$

$$q_{Au} = 79.e$$

Portanto, obtemos:

$$r = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{2.e.79.e}{e.7,68.10^6} = \frac{1}{2.\pi.\varepsilon_0}.\frac{79}{7,68.10^6}.e$$

Substituindo os valores podemos estimar a distância, que é uma primeira aproximação para o raio atômico:

$$r = \frac{1}{2.\pi.8,85.10^{-12}}.\frac{79}{7,68.10^6}.1,6.10^{-19} = 3.10^{-14}\ m$$

4.7 Voltando ao modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio

a Razão entre energia potencial eletrostática e energia cinética

Como a força de atração eletrostática é radial, sua resultante funcionará como uma resultante centrípeta, fazendo o elétron girar em torno do próton com velocidade constante. Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$F_e = m.a_r \Rightarrow \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r^2} = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r} = m.v^2$$

Lembre-se que a energia cinética T é $\frac{1}{2}.m.v^2$, ou seja, no lado direito temos $2.T$. No lado esquerdo, temos o módulo da energia potencial eletrostática U, a mesma é negativa pois há uma força de atração. Com as considerações, concluímos que:

$$-U = 2.T \Rightarrow U = -2.T$$

b Energia necessária para ionizar o átomo

Lembre-se que a variação da energia será exatamente o trabalho associado ao movimento. No infinito, a energia do elétron deve ser nula, portanto:

$$W = -U_1$$

Sendo U_1 a energia potencial eletrostática do elétron na primeira órbita de Bohr, quando o átomo está no seu estado fundamental. Essa valor é descoberto aplicando a equação desenvolvida na solução do ***Problema 11.5 - Volume 1***. Ela nos diz que a energia associada à órbita n (em eV) é:

$$U_n = -\frac{1}{n^2}.\frac{m_e.e^3}{32.\pi^2.\varepsilon_0^2.\hbar^2}\ eV$$

Para a primeira órbita, teremos simplesmente:

$$U_1 = -\frac{m_e.e^3}{32.\pi^2.\varepsilon_0^2.\hbar^2}$$

Então, substituindo os valores, obtemos o valor do trabalho necessário:

$$W = \frac{9,1.10^{-31}.(1,6.10^{-19})^3}{32.\pi^2.(8,85.10^{-12})^2.(1,055.10^{-34})^2} = 13,6\ eV$$

4.8 Gota líquida carregada dividindo-se

a Variação da energia potencial eletrostática nesse processo

A energia potencial eletrostática inicialmente é a associada à esfera de raio R e carga Q. Teremos, assim:

$$U_i = -\frac{3.Q^2}{20.\pi.\varepsilon_0.R}$$

Ao dividir-se, o volume da gota é conservado. Na prática, isso significa que o volume das duas esferas menores (que são iguais), somados, devem dar o volume da esfera maior inicial. Com essa condição, podemos calcular o novo raio de cada esfera:

$$V = 2.v \Rightarrow \frac{4}{3}.\pi.R^3 = 2.\frac{4}{3}.\pi.r^3 \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$$

A carga também é conservada. Então a soma das cargas das esferas menores (que são iguais) devem ser igual à carga inicial da esfera maior:

$$Q = 2.q \Rightarrow q = \frac{Q}{2}$$

Então, agora temos duas esferas de raio r e carga q. Logo, a energia potencial eletrostática total é[†]:

$$U_f = -2.\left(\frac{3.q^2}{20.\pi.\varepsilon_0.r}\right) = -\frac{3.(\frac{Q}{2})^2}{10.\pi.\varepsilon_0.\frac{R}{\sqrt[3]{2}}} = -\frac{Q^2}{4}.\frac{\sqrt[3]{2}}{R}.\frac{3}{10.\pi.\varepsilon_0} = -\frac{Q^2}{2}.\frac{\sqrt[3]{2}}{R}.\frac{3}{20.\pi.\varepsilon_0}$$

$$U_f = -2^{\frac{1}{3}-1}.\frac{3.Q^2}{20.\pi.\varepsilon_0.R} = -2^{-\frac{2}{3}}.\frac{3.Q^2}{20.\pi.\varepsilon_0.R}$$

Agora podemos finalmente calcular a variação da energia em decorrência desta divisão da esfera.

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{3.Q^2}{20.\pi.\varepsilon_0.R} - 2^{-\frac{2}{3}}.\frac{3.Q^2}{20.\pi.\varepsilon_0.R} = (1-2^{-\frac{2}{3}}).\frac{3.Q^2}{20.\pi.\varepsilon_0.R}\ J = (1-2^{-\frac{2}{3}}).\frac{3.Q}{20.\pi.\varepsilon_0.R}\ eV$$

b Aplicando o modelo para a fissão de U^{235}

Primeiramente, podemos estimar o raio atômico do átomo com a equação dada:

$$R = 1,3.A^{\frac{1}{3}}.10^{-15} = 1,3.235^{\frac{1}{3}}.10^{-15}\ m$$

A carga também pode ser determinar, o U^{235} tem 92 prótons, ou seja, sua carga é $92.e$. Com isso, o valor número de energia potencial liberada é:

$$\Delta U = (1-2^{-\frac{2}{3}}).\frac{3.92.1,6.10^{-19}}{20.\pi.8,85.10^{-12}.1,3.235^{\frac{1}{3}}.10^{-15}} = 337\ MeV$$

[†]Não confunda energia potencial eletrostática com potencial eletrostático!

4.9 Demonstrando resultados do Cálculo

a Provando que $\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = f.\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$

No espaço tridimensional, o vetor $\vec{v}$ pode ser escrito como:

$$\vec{v} = v_x\ \hat{x} + v_y\ \hat{y} + v_z\ \hat{z}$$

Multiplicando-o pela função f, vale a propriedade distributiva:

$$f.\vec{v} = f.v_x\ \hat{x} + f.v_y\ \hat{y} + f.v_z\ \hat{z}$$

Agora aplicamos a divergência deste resultado:

$$\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot [f.v_x\ \hat{x} + f.v_y\ \hat{y} + f.v_z\ \hat{z}]$$

Lembre que $\vec{\nabla}$ é um operador vetorial diferencial escrito como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\ \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\ \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\ \hat{z}$$

Aplicando o operador ao vetor:

$$\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\ \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\ \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\ \hat{z}\right] \cdot [f.v_x\ \hat{x} + f.v_y\ \hat{y} + f.v_z\ \hat{z}]$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}[f.v_x] + \frac{\partial}{\partial y}[f.v_y] + \frac{\partial}{\partial z}[f.v_z]$$

Para cada termo, vale a derivada do produto que já conhecemos:

$$\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = v_x.\frac{\partial}{\partial x}f + f.\frac{\partial}{\partial x}v_x + v_y.\frac{\partial}{\partial y}f + f.\frac{\partial}{\partial y}v_y + v_z.\frac{\partial}{\partial z}f + f.\frac{\partial}{\partial z}v_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = f.\left[\frac{\partial}{\partial x}v_x + \frac{\partial}{\partial y}v_y + \frac{\partial}{\partial z}v_z\right] + \left[v_x.\frac{\partial}{\partial x}f + v_y.\frac{\partial}{\partial y}f + v_z.\frac{\partial}{\partial z}f\right]$$

O primeiro termo entre colchetes é exatamente o divergente do nosso vetor $\vec{v}$ e o segundo é o produto interno entre o nosso vetor $\vec{v}$ e o gradiente da função escalar f.

$$\vec{\nabla} \cdot (f.\vec{v}) = f.\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$$

b Provando que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v}$

No espaço tridimensional, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão:

$$\vec{u} = u_x\ \hat{x} + u_y\ \hat{y} + u_z\ \hat{z}$$

$$\vec{v} = v_x\ \hat{x} + v_y\ \hat{y} + v_z\ \hat{z}$$

O produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado pelo seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Portanto, obtemos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y.v_z - u_z.v_y)\ \hat{x} + (u_z.v_x - u_x.v_z)\ \hat{y} + (u_x.v_y - u_y.v_x)\ \hat{z}$$

Agora podemos aplicar a divergência ao resultado do produto vetorial:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot [(u_y.v_z - u_z.v_y)\ \hat{x} + (u_z.v_x - u_x.v_z)\ \hat{y} + (u_x.v_y - u_y.v_x)\ \hat{z}]$$

Novamente escrevendo o $\vec{\nabla}$ explicitamente em termo de suas derivadas e aplicando o produto interno em cada termo do produto vetorial, obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}[u_y.v_z - u_z.v_y] + \frac{\partial}{\partial y}[u_z.v_x - u_x.v_z] + \frac{\partial}{\partial z}[u_x.v_y - u_y.v_x]$$

Para cada termo entre colchetes vale a regra da derivada da soma:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}[u_y.v_z] - \frac{\partial}{\partial x}[u_z.v_y] + \frac{\partial}{\partial y}[u_z.v_x] - \frac{\partial}{\partial y}[u_x.v_z] + \frac{\partial}{\partial z}[u_x.v_y] - \frac{\partial}{\partial z}[u_y.v_x]$$

Cada termo entre colchetes agora pode ser derivado usando a regra do produto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = {} & v_z.\frac{\partial}{\partial x}u_y + u_y.\frac{\partial}{\partial x}v_z - v_y.\frac{\partial}{\partial x}u_z - u_z.\frac{\partial}{\partial x}v_y \\ & + v_x.\frac{\partial}{\partial y}u_z + u_z.\frac{\partial}{\partial y}v_x - v_z.\frac{\partial}{\partial y}u_x - u_x.\frac{\partial}{\partial y}v_z \\ & + v_y.\frac{\partial}{\partial z}u_x + u_x.\frac{\partial}{\partial z}v_y - v_x.\frac{\partial}{\partial z}u_y - u_y.\frac{\partial}{\partial z}v_x \end{aligned}$$

Agora podemos agrupar as derivadas que estão sendo multiplicadas pelo mesmo termo:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = {} & v_x.\left[\frac{\partial}{\partial y}u_z - \frac{\partial}{\partial z}u_y\right] + u_x.\left[\frac{\partial}{\partial z}v_y - \frac{\partial}{\partial y}v_z\right] \\ & + v_y.\left[\frac{\partial}{\partial z}u_x - \frac{\partial}{\partial x}u_z\right] + u_y.\left[\frac{\partial}{\partial x}v_z - \frac{\partial}{\partial z}v_x\right] \\ & + v_z.\left[\frac{\partial}{\partial x}u_y - \frac{\partial}{\partial y}u_x\right] + u_z.\left[\frac{\partial}{\partial y}v_x - \frac{\partial}{\partial x}v_y\right] \end{aligned}$$

Vamos apenas trocar o sinal dos termos entre colchetes que acompanham as componentes do vetor $\vec{u}$, isso facilitará a visualização do que temos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = v_x.\left[\frac{\partial}{\partial y}u_z - \frac{\partial}{\partial z}u_y\right] - u_x.\left[\frac{\partial}{\partial y}v_z - \frac{\partial}{\partial z}v_y\right]$$

$$+ v_y.\left[\frac{\partial}{\partial z}u_x - \frac{\partial}{\partial x}u_z\right] - u_y.\left[\frac{\partial}{\partial z}v_x - \frac{\partial}{\partial x}v_z\right]$$
$$+ v_z.\left[\frac{\partial}{\partial x}u_y - \frac{\partial}{\partial y}u_x\right] - u_z.\left[\frac{\partial}{\partial x}v_y - \frac{\partial}{\partial y}v_x\right]$$

Para ficar ainda mais claro oque temos, vamos deixar os termos entre colchetes que multiplicam componentes do mesmo vetor todos na mesma linha:

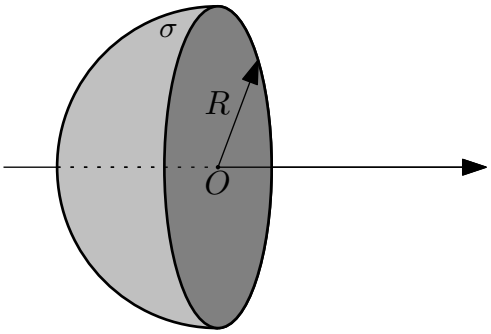
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = v_x.\left[\frac{\partial}{\partial y}u_z - \frac{\partial}{\partial z}u_y\right] + v_y.\left[\frac{\partial}{\partial z}u_x - \frac{\partial}{\partial x}u_z\right] + v_z.\left[\frac{\partial}{\partial x}u_y - \frac{\partial}{\partial y}u_x\right]$$

$$- u_x.\left[\frac{\partial}{\partial y}v_z - \frac{\partial}{\partial z}v_y\right] - u_y.\left[\frac{\partial}{\partial z}v_x - \frac{\partial}{\partial x}v_z\right] - u_z.\left[\frac{\partial}{\partial x}v_y - \frac{\partial}{\partial y}v_x\right]$$

Perceba que, por exemplo, a componente x do vetor $\vec{v}$ está multiplicando a componente x do vetor $\vec{\nabla}\times\vec{u}$. O padrão se repete para todas as componentes e em todos os termos. Portanto, assim concluímos que:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{v}$$

4.10 Casca hemisférica com densidade superficial σ



a Potencial eletrostático no centro da casca hemisférica

No geral, para uma distribuição arbitrária de cargas, o potencial eletrostático é dado por:

$$V = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\int \frac{dq}{r}$$

Como temos uma densidade superficial de cargas, podemos expressar a carga dq em função dela:

$$\sigma = \frac{dq}{da} \Rightarrow dq = \sigma.da$$

E como estamos num ponto de simetria do hemisfério, todos os pontos da distribuição distam o mesmo valor R do nosso ponto O. Por isso, a integral é simplesmente:

$$V_O = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\int \frac{\sigma.da}{R} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{\sigma}{R}.\int_0^A da = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{\sigma}{R}.A$$

O hemisfério é uma meia-esfera de raio R, sua área é facilmente calculada:

$$V_O = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{\sigma}{R}.\frac{4.\pi.R^2}{2} = \frac{\sigma.R}{2.\varepsilon_0}$$

b Velocidade de uma partícula no infinito

Sabemos que em cada ponto, a energia potencial associada será:

$$U = q.V$$

Inicialmente, a energia total da carga q é simplesmente a potencial eletrostática:

$$E_i = q.V_O = \frac{q.\sigma.R}{2.\varepsilon_0}$$

No final, teremos apenas energia cinética, visto que o potencial eletrostático é nulo no infinito:

$$E_f = \frac{1}{2}.m.v^2$$

Como a energia se conserva, obtemos:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{q.\sigma.R}{2.\varepsilon_0} = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{q.\sigma.R}{m.\varepsilon_0}}$$

4.11 Balão de borracha carregado uniformemente com carga Q

a Energia eletrostática contida no balão

Sabemos que a energia pode ser expressar em função do potencial eletrostático:

$$dU = V.dq$$

Mas lembre-se que o potencial eletrostático pode ser expresso em função do campo elétrico. Com isso, obtemos:

$$dU = -\left(\int \vec{E} \cdot d\vec{r} \right).dq$$

Pela lei de Gauss, como já vimos incansavelmente, o campo elétrico externo será dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}\ \hat{r}$$

Agora, substituindo na equação da energia potencial, podemos integrar vindo do infinito até o raio R do balão.

$$dU = -\left(\int_{\infty}^{R} \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}\ dr \right).dq = -\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.q\left(\int_{\infty}^{R} \frac{1}{r^2}\ dr \right).dq = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R}.dq$$

Agora para obter a energia potencial integramos na carga do balão:

$$U = \int_0^Q \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q}{R}\ dq = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{1}{R}.\int_0^Q q\ dq = \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Q^2}{R}$$

b Variação da energia em relação ao raio do balão

A força é dada pelo negativo do gradiente da energia potencial. Como a energia potencial so depende de r, a força será simplesmente:

$$\vec{F} = -\frac{d}{dR}U\ \hat{r} = -\frac{d}{dR}\left[\frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Q^2}{R} \right]\ \hat{r} = \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Q^2}{R^2}\ \hat{r}$$

Mas queremos o "fluxo de força", ou seja, a força por unidade de área. Então basta dividir pela área do balão:

$$\phi = \frac{|\vec{F}|}{A} = \frac{\frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Q^2}{R^2}}{4.\pi.R^2} = \frac{1}{32.\pi^2.\varepsilon_0}.\frac{Q^2}{R^4}$$

CAPÍTULO

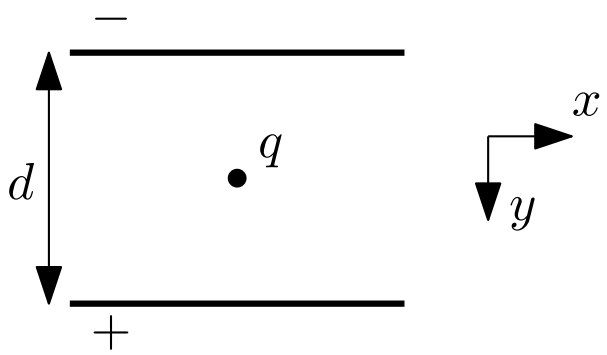
5

CAPACITÂNCIA E CAPACITORES. DIELÉTRICOS

"A beleza do cosmos não reside apenas em sua harmonia matemática, mas em sua capacidade de gerar vida e consciência. Nós somos o modo do universo se conhecer."

Carl Sagan

5.1 O experimento de Millikan



A primeira coisa que podemos verificar é a massa da gota de óleo, pois temos o raio da gota e a densidade do óleo:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho.V = \frac{4}{3}.\pi.r^3.\rho$$

Para a condição inicial, com as placas do capacitor descarregadas, podemos aplicar a Segunda Lei de Newton. A velocidade terminal é obtida na condição de equilíbrio:

$$m.g - k.v_{term} = 0 \Rightarrow v_{term} = \frac{m.g}{k}$$

Quando as placas forem ligadas, podemos concluir que a força elétrica aponta para baixo, pois a velocidade terminal aumenta. Como já sabemos que o campo elétrico é orientado para cima, a única forma de a força elétrica apontar para baixo é se a carga da gota de óleo for negativa. Assim, aplicando condição de equilíbrio novamente, obtemos:

$$m.g + |q|.E - k.v = 0$$

Sabemos que a velocidade terminal v é o dobro da v_{term}:

$$m.g + |q|.E - k.2.v_{term} = 0 \Rightarrow |q| = \frac{2.k.v_{term} - m.g}{E}$$

Sabemos quanto vale v_{term} e podemos escrever o campo elétrico em função do espaçamento entre as placas e a diferença de potencial:

$$|q| = \frac{2.m.g - m.g}{\frac{\Delta V}{d}} = \frac{m.g.d}{\Delta V}$$

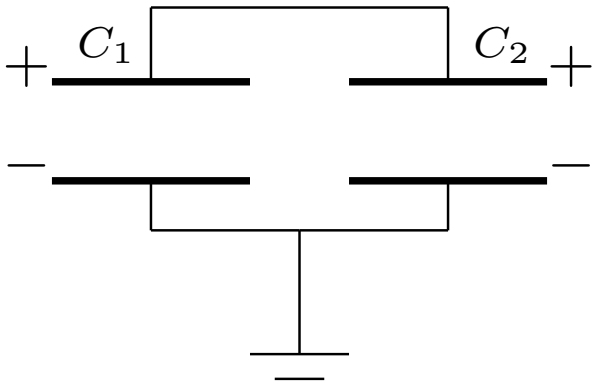
Substituindo os valores, podemos determinar o módulo da carga:

$$|q| = \frac{\frac{4}{3}.\pi.r^3.\rho.g.d}{\Delta V} = \frac{4}{3}.\frac{\pi.\rho.g.d.r^3}{\Delta V} = \frac{4}{3}.\frac{\pi.0,78.10^{-3}.9,81.5.10^{-2}.(2.10^{-6})^3}{40.10^3} = 3,2.10^{-19}\ C$$

Assim, podemos expressar a carga da gota em função da carga fundamental:

$$|q| = 2.e$$

5.2 Capacitores ligados à Terra



a Potencial das placas positivas

Inicialmente há carga nos capacitores. Quando são juntados, vale a conservação da carga:

$$Q_f = Q_1 + Q_2 = Q + Q = 2.Q$$

Como os capacitores estão em paralelo, a diferença de potencial entre suas placas é a mesma. Logo, pela definição de capacitância, temos:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V} \Rightarrow Q_1 = C_1.V = C.V$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V} \Rightarrow Q_2 = C_2.V = 2.C.V$$

Assim, obtemos:

$$C.V + 2.C.V = 2.Q \Rightarrow V = \frac{2}{3}.\frac{Q}{C}$$

Como a Terra tem potencial nulo, V é o potencial das placas positivas.

b Variação da energia

No geral, a energia potencial eletrostática de um capacitor k é dada por:

$$U_k = \frac{1}{2}.\frac{Q_k^2}{C_k}$$

Inicialmente, a energia total é a soma da energia de cada capacitor:

$$U_i = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}.\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}.\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}.\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}.\frac{Q^2}{2.C} = \frac{3}{4}.\frac{Q^2}{C}$$

Como estão em paralelo, a capacitância equivalente é:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = C + 2.C = 3.C$$

Logo, a energia final associada aos capacitores é:

$$U_f = \frac{1}{2}.\frac{Q^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2}.\frac{(2.Q)^2}{3C} = \frac{2}{3}.\frac{Q^2}{C}$$

Portanto, a variação é:

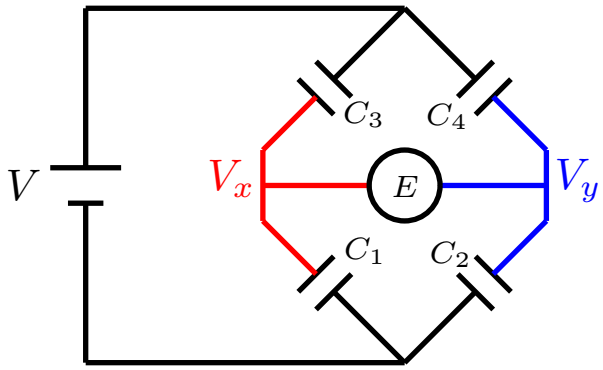
$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{2}{3}.\frac{Q^2}{C} - \frac{3}{4}.\frac{Q^2}{C} = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right).\frac{Q^2}{C} = \frac{-1}{12}.\frac{Q^2}{C}$$

O sinal negativo indica o sistema perde energia ao estabelecer a associação.

c Destino da energia perdida

A energia potencial eletrostática se converte em outras formas de energia, como energia térmica (aquecendo os capacitores) ou energia luminosa (acendendo faíscas).

5.3 Ponte de capacitâncias



Se o detector E marca zero, isso implica dizer que:

$$V_x - V_y = 0 \Rightarrow V_x = V_y$$

Vamos analisar os capacitores superiores, mas ideia pode ser aplicada aos inferiores também, não há diferença.
Aplicando a definição de capacitância aos capacitores 3 e 4, poderemos isolar os potenciais V_x e V_y respectivamente:

$$C_3 = \frac{Q_3}{V - V_x} \Rightarrow V - V_x = \frac{Q_3}{C_3} \Rightarrow V_x = V - \frac{Q_3}{C_3}$$

$$C_4 = \frac{Q_4}{V - V_y} \Rightarrow V - V_y = \frac{Q_4}{C_4} \Rightarrow V_y = V - \frac{Q_4}{C_4}$$

Como são iguais, obtemos:

$$\frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q_4}{C_4}$$

Como $E = 0$, temos uma associação em série em cada lado. Do lado esquerdo e direito, as capacitâncias equivalentes serão C_x e C_y respectivamente. Portanto, no momento em que os capacitores superiores atingem suas cargas e, consequentemente, estabelecem o potencial tal que o detector marca zero, teremos uma capacitância equivalente:

$$\frac{Q_3}{C_x} = \frac{Q_4}{C_y} \Rightarrow Q_3 . \frac{C_3 + C_1}{C_3 . C_1} = Q_4 . \frac{C_4 + C_2}{C_4 . C_2}$$

Da primeira relação, podemos isolar a carga Q_3:

$$Q_3 = \frac{Q_4}{C_4} . C_3$$

Portanto:

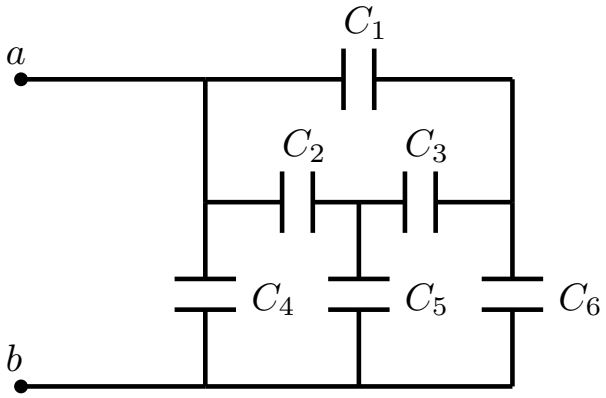
$$\frac{Q_4}{C_4} . C_3 . \frac{C_3 + C_1}{C_3 . C_1} = Q_4 . \frac{C_4 + C_2}{C_4 . C_2} \Rightarrow \frac{C_3}{C_4} . \frac{C_3 + C_1}{C_3 . C_1} = \frac{C_4 + C_2}{C_4 . C_2} \Rightarrow C_2 . (C_3 + C_1) = (C_4 + C_2) . C_1$$

Assim, concluímos que:

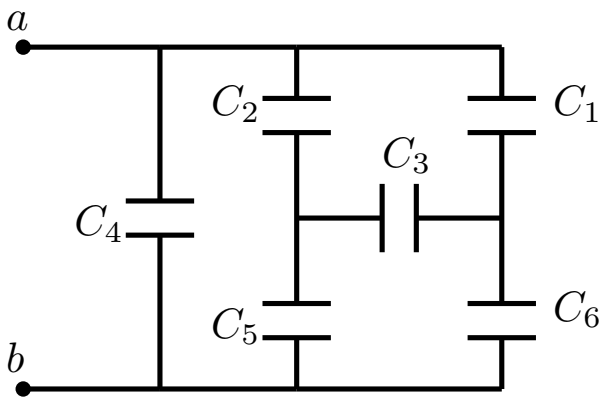
$$\frac{C_3}{C_4} = \frac{C_1}{C_2}$$

5.4 Descobrindo a capacitância equivalente de um circuito usando resultados antigos

Todos os capacitores têm a mesma capacitância C, usaremos índices apenas para identificá-los.



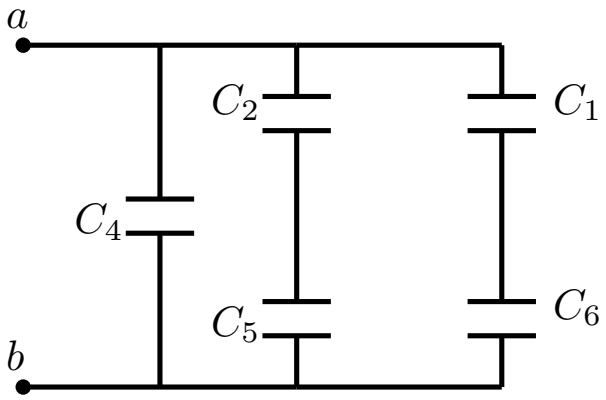
Como está, o circuito não nos elucida muito o rumo que temos que tomar. Porém, respeitando os potenciais em cada parte do fio, podemos escrever um circuito equivalente ao inicial, mas de forma mais conveniente.



Agora, veja que C_3 está no mesmo lugar que o detector E do ***Problema 5.3***. Como

$$\frac{C_5}{C_6} = \frac{C_2}{C_1}$$

a diferença de potencial V_3 é nula, ou seja, não passa corrente pelo capacitor 3. Consequentemente, podemos simplesmente esquecê-lo. Agora o problema se reduziu simplesmente ao cálculo de uma capacitância equivalência simples.



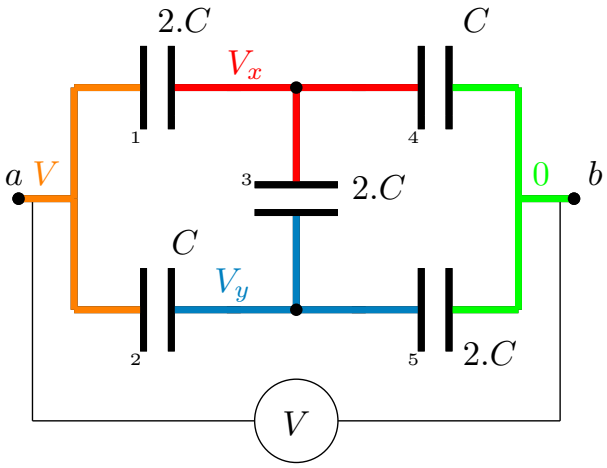
A capacitância equivalente às associações em série de C_1 e C_6, e C_2 e C_5 será:

$$C_{1/6} = C_{2/5} = \frac{C.C}{C+C} = \frac{C}{2}$$

Logo, para a associação em paralelo, teremos:

$$C_{eq} = C_4 + C_{1/6} + C_{2/5} = C + \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = 2.C$$

5.5 Capacitância equivalente de um circuito complicado



Por conservação de carga, a soma das cargas que passam pelos pontos P_1 e P_2 devem ser zero, ou seja, a carga que "vem"até o ponto é igual a carga que "vai"do ponto.
Vamos começar estudando o ponto P_1, nele entra uma carga $Q_1 + Q_3$ e Q_4.
Equacionando a relação, obtemos:

$$Q_1 + Q_3 = Q_4 \Rightarrow C_1.V_1 + C_3.V_3 = C_4.V_4$$

Sabemos as capacitâncias e as diferenças de potencial, logo:

$$2.C.(V - V_x) + 2.C.(V_y - V_x) = C.(V_x - 0) \Rightarrow 2.(V - V_x) + 2.(V_y - V_x) = V_x - 0$$

$$2.V - 2.V_x + 2.V_y - 2.V_x = V_x \Rightarrow 2.V = 5.V_x - 2.V_y$$

Para o ponto P_2, perceba que temos uma carga Q_2 entrando e uma carga $Q_3 + Q_5$ saindo. Vamos tratar este ponto tal qual fizemos com o ponto P_1.

$$Q_2 = Q_3 + Q_5 \Rightarrow C_2.V_2 = C_3.V_3 + C_5.V_5 \Rightarrow C.(V - V_y) = 2.C.(V_y - V_x) + 2.C.(V - 0)$$

$$V - V_y = 2.(V_y - V_x) + 2.(V - 0) \Rightarrow V - V_y = 2.V_y - 2.V_x + 2.V \Rightarrow V = 5.V_y - 2.V_x$$

Perceba que obtivemos 2 equações que dependem das variáveis V_x e V_y, sendo elas:

$$2.V = 5.V_x - 2.V_y$$

$$V = 5.V_y - 2.V_x$$

Isolando V_y da primeira, obtemos:

$$V_y = \frac{5.V_x - 2.V}{2}$$

Substituindo isto na segunda equação, poderemos determinar o valor de V_x em função de V:

$$V = 5.\frac{5.V_x - 2.V}{2} - 2.V_x = \frac{25.V_x}{2} - \frac{10.V}{2} - 2.V_x \Rightarrow V + \frac{10.V}{2} = \frac{25.V_x}{2} - 2.V_x$$

$$\frac{12.V}{2} = \frac{21.V_x}{2} \Rightarrow V_x = \frac{12}{21}.V = \frac{4}{7}.V$$

Agora podemos substituir este valor na equação encontrada para V_y:

$$V_y = \frac{5.V_x - 2.V}{2} = \frac{5}{2}.V_x - V = \frac{5}{2}.\frac{4}{7}.V - V = \frac{3.V}{7}$$

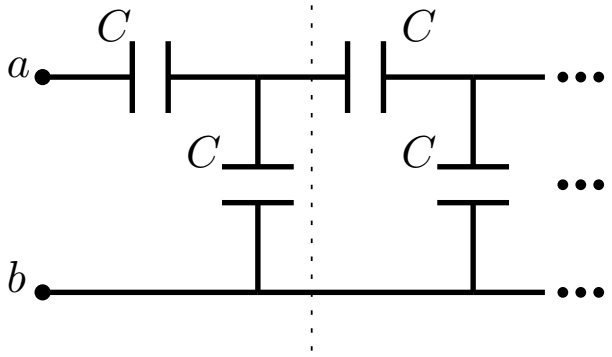
Agora perceba que a carga total do circuito é a carga armazenadas nos capacitores 1 e 2, que estão ligados diretamente à fonte. Podemos então descobrir a carga total, pois sabemos explicitamente o valor dos potenciais V_x e V_y:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1.V_1 + C_2.V_2 = 2.C.(V - V_x) + C.(V - V_y) = 2.C.\left(V - \frac{4}{7}.V\right) + C.\left(V - \frac{3.V}{7}\right)$$

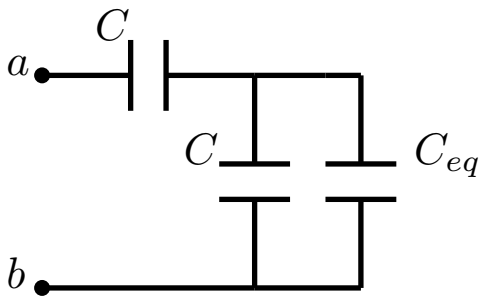
$$Q = \frac{2.3}{7}.C.V + \frac{4}{7}.C.V = \frac{6}{7}.C.V + \frac{4}{7}.C.V = \frac{10.C}{7}.V$$

Ou seja, a associação de capacitores equivale a um único capacitor cuja capacitância é $\frac{10}{7}.C$.

5.6 Associação infinita de capacitores



Perceba que o circuito se repete infinitamente num mesmo padrão. Como é infinito, uma repetição à menos ou à mais não fará diferença alguma. Por isso, podemos refazer o circuito como:



Como 1 circuito a mais ou a menos não fará diferença, a capacitância equivalente geral será:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_{eq}}$$

Novamente, a capacitância de todo o circuito é igual à capacitância de todo o circuito menos um trecho porquê ele é infinito.

Vamos organizar a equação:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{C + C_{eq} + C}{C.(C + C_{eq})} \Rightarrow C.(C + C_{eq}) = C_{eq}.(2.C + C_{eq})$$

$$C^2 + C.C_{eq} = 2.C.C_{eq} + C_{eq}^2 \Rightarrow C_{eq}^2 + C.C_{eq} - C^2 = 0$$

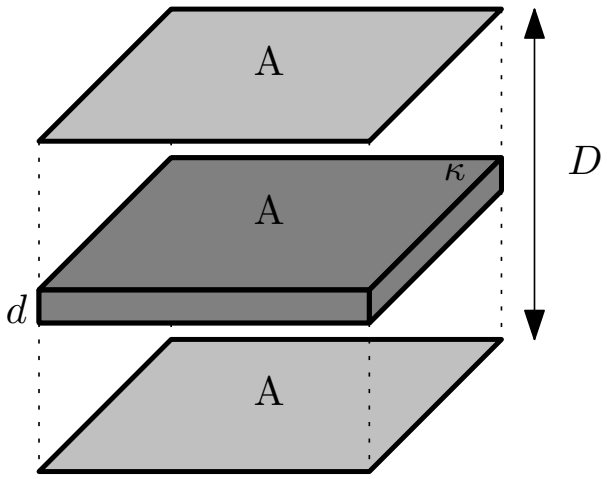
Obtivemos uma equação do segundo grau para a capacitância equivalente. Usando a fórmula de Bháskara, obtemos:

$$C_{eq} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4.(-C^2)}}{2} = \frac{-C \pm \sqrt{5.C^2}}{2}$$

Como a capacitância é uma quantidade positiva, devemos pegar a solução positiva da equação do segundo grau:

$$C_{eq} = (\sqrt{5} - 1).\frac{C}{2}$$

5.7 Dielétrico entre as placas de um capacitor



Ao introduzir a lâmina dielétrica, ocorrerá o fenômeno de polarização, fazendo com que nosso capacitor se divida em 3 regiões:

1. acima da lâmina;
2. dentro da lâmina;
3. abaixo da lâmina.

Sendo que nas regiões acima e abaixo não temos dielétrico, é apenas vácuo. E na região dentro da lâmina temos um dielétrico com constante dielétrica κ.

Perceba que temos um circuito com 3 capacitores em série, cada região forma um capacitor independente em série com o próximo. É fácil verificar que estão em série, pois a soma da diferença de potencial nas placas de cada um nos retorna a diferença de potencial total do circuito.

Como estamos lidando com capacitores de placas paralelas, a capacitância do i-ésimo capacitor é:

$$C_i = \varepsilon.\frac{A_i}{d_i}$$

Se estivermos no vácuo, vale $\varepsilon = \varepsilon_0$, mas se estivermos em um material com constante dielétrica κ, obtemos $\varepsilon = \kappa.\varepsilon_0$.

Como a associação é em série, a capacitância equivalente é:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d_1}{\varepsilon.A} + \frac{d_2}{\varepsilon.A} + \frac{d_3}{\varepsilon.A} = \frac{d_1}{\varepsilon_0.A} + \frac{d_3}{\varepsilon_0.A} + \frac{d}{\kappa.\varepsilon_0.A}$$

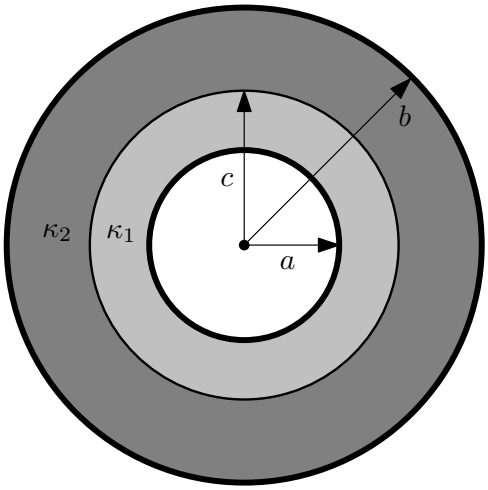
$$\frac{1}{C} = \frac{d_1 + d_3}{\varepsilon_0.A} + \frac{d}{\kappa.\varepsilon_0.A}$$

Perceba que a soma das distâncias entre as placas dos capacitores 1 e 3 nos dará exatamente o comprimento do capacitor inicial menos a largura da lâmina dielétrica*. Logo:

$$\frac{1}{C} = \frac{D-d}{\varepsilon_0.A} + \frac{d}{\kappa.\varepsilon_0.A} = \frac{1}{\varepsilon_0.A}.\left(D - d + \frac{d}{\kappa}\right) \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0.A}{D - d + \frac{d}{\kappa}}$$

*Então, repare que é como se pudéssemos substituir os "dois capacitores"por apenas um, e este terá a distância entre suas placas dada por uma subtração entre a distância entre as placas do capacitor inicial e a largura da lâmina dielétrica introduzida.

5.8 Capacitor esférico com dielétrico



Supondo que o capacitor esteja carregado com uma carga Q, ou seja, sua placa positiva tem $+Q$ e sua placa negativa tem $-Q$, podemos calcular o campo no interior de cada dielétrico usando a Lei de Gauss. No geral, obteremos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon}.\frac{Q}{r^2}\ \hat{r}$$

Lembrando que ε é $\kappa.\varepsilon_0$, sendo κ a constante dielétrica do dielétrico da região. Assim, para cada região, obtemos:

$$\vec{E_1} = \frac{1}{4.\pi.\kappa_1.\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}\ \hat{r}\ \text{,para } a < r < c$$

$$\vec{E_2} = \frac{1}{4.\pi.\kappa_2.\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}\ \hat{r}\ \text{,para } c < r < b$$

Agora, com posse dos campos elétricos em cada região, podemos descobrir a variação do potencial eletrostático. Integrando, obtemos:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = (V_2 - V_c) - (V_1 - V_c)$$

Como queremos saber a diferença de potencial entre as placas, não devemos integrar até o infinito, pois as placas estão a uma distância finita uma das outras. Por isso, escrevemos explicitamente o potencial V_c, que é a "divisa"entre os dois dielétricos, a partir deste ponto o campo elétrico passa a se comportar de forma distinta. Agora podemos escrever a variação em função dos campos elétricos:

$$\Delta V = -\int_c^b E_2\ dr - \left(-\int_a^c E_1\ dr\right) = -\int_c^b \frac{1}{4.\pi.\kappa_2.\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}\ dr + \int_a^c \frac{1}{4.\pi.\kappa_1.\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}\ dr$$

$$\Delta V = -\frac{Q}{4.\pi.\kappa_2.\varepsilon_0}.\int_c^b \frac{1}{r^2}\ dr + \frac{Q}{4.\pi.\kappa_1.\varepsilon_0}.\int_a^c \frac{1}{r^2}\ dr = -\frac{Q}{4.\pi.\kappa_2.\varepsilon_0}.\left[\frac{-1}{r}\right]\Bigg|_c^b + \frac{Q}{4.\pi.\kappa_1.\varepsilon_0}.\left[\frac{-1}{r}\right]\Bigg|_a^c$$

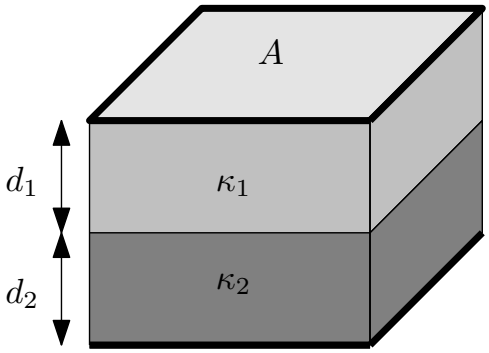
$$\Delta V = \frac{Q}{4.\pi.\kappa_2.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right] + \frac{Q}{4.\pi.\kappa_1.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right]$$

Agora, partindo da definição de capacitância, obtemos finalmente:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4.\pi.\kappa_2.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right] + \frac{Q}{4.\pi.\kappa_1.\varepsilon_0}.\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right]} = \frac{4.\pi.\varepsilon_0}{\frac{1}{\kappa_2}.\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right] + \frac{1}{\kappa_1}.\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right]}$$

5.9 Capacitor de placas planas preenchido com dois dielétricos

a Nova capacitância do capacitor



O campo elétrico gerado por um plano carregado infinito (ou muito próximo a um plano carregado finito) é sempre

$$E = \frac{\sigma}{2.\varepsilon}$$

Como temos duas placas com densidades contrárias, o campo resultante será o dobro deste.
Em cada região, teremos, então:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\kappa_1.\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{\kappa_2.\varepsilon_0}$$

Como são constantes, estes campos elétricos irão implicar em diferenças de potencial que são simplesmente a intensidade do campo elétrico multiplicada pela distância entre as superfícies, nesse caso a distância entre a placa e a superfície de divisão entre os dielétricos:

$$\Delta V_1 = E_1.d_1 = \frac{\sigma}{\kappa_1.\varepsilon_0}.d_1$$

$$\Delta V_2 = E_2.d_2 = \frac{\sigma}{\kappa_2.\varepsilon_0}.d_2$$

Com a definição de capacitância podemos calcular a capacitância de cada capacitor com dielétricos distintos:

$$C_1 = \frac{Q}{\Delta V_1} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\kappa_1.\varepsilon_0}.d_1} = \frac{Q}{\frac{\frac{Q}{A}}{\kappa_1.\varepsilon_0}.d_1} = \kappa_1.\varepsilon_0\frac{A}{d_1}$$

$$C_2 = \frac{Q}{\Delta V_2} = \frac{Q}{\frac{\sigma}{\kappa_2.\varepsilon_0}.d_2} = \frac{Q}{\frac{\frac{Q}{A}}{\kappa_2.\varepsilon_0}.d_2} = \kappa_2.\varepsilon_0\frac{A}{d_2}$$

Como temos uma associação em série[†], a capacitância equivalente será:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\kappa_1.\varepsilon_0.A} + \frac{d_2}{\kappa_2.\varepsilon_0.A} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0.A}.\left[\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right]$$

[†]Por motivos já discutidos em Problemas anteriores.

b Densidade de carga nas placas

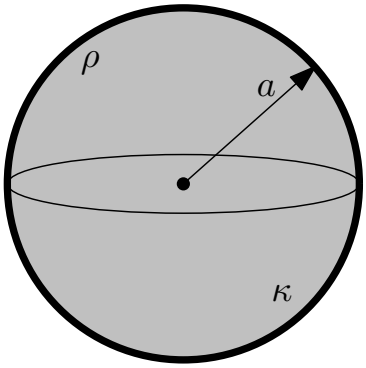
Da definição de capacitância, temos:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma.A}{V} \Rightarrow \sigma = \frac{C.V}{A}$$

Podemos ainda substituir C pela capacitância que obtivemos no item anterior. Assim, obtemos:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0.A}{\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}}.\frac{V}{A} = \frac{\varepsilon_0.V}{\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}}$$

5.10 Esfera dielétrica uniformemente carregada



Como temos a densidade volumétrica de carga e o raio da esfera, podemos calcular a carga total contida na esfera:

$$\rho = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = \rho.V = \rho.\frac{4}{3}.\pi.a^3$$

a Vetor campo elétrico

Sabemos que sempre o campo elétrico apontará para $+\hat{r}$, e pela Lei de Gauss podemos determinar o módulo desse campo. Para $r > a$, temos:

$$\oint \vec{E}_{out} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$$

Externamente, estamos no vácuo, então $\varepsilon \to \varepsilon_0$, e toda a carga Q está contida dentro da Gaussiana:

$$\oint \vec{E}_{out} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{out}.A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{out} = \frac{Q}{\varepsilon_0.A} = \frac{Q}{\varepsilon_0.4.\pi.r^2}$$

Portanto, vetorialmente, temos:

$$\vec{E}_{out} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Q}{r^2}\ \hat{r} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.a^3}{r^2}\ \hat{r} = \frac{\rho}{3.\varepsilon_0}.\frac{a^3}{r^2}\ \hat{r}$$

Na região interna, para $r < a$, continua valendo a Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E}_{in} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon}$$

Dentro da esfera há dielétrico, portanto temos uma constante dielétrica a ser considerada, assim $\varepsilon \to \kappa.\varepsilon_0$:

$$\oint \vec{E}_{in} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\kappa.\varepsilon_0}$$

E vale que a densidade volumétrica deve ser constante, ou seja, a carga contida dentro da esfera de raio r dividida pelo volume da esfera deve ser igual à densidade volumétrica de cargas da esfera:

$$\frac{Q_{int}}{v} = \rho \Rightarrow Q_{int} = \rho.v = \rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3$$

Sendo assim, obtemos o seguinte para o campo elétrico interno à esfera:

$$\oint \vec{E}_{in} \cdot d\vec{A} = E_{in}.A = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3}{\kappa.\varepsilon_0} \Rightarrow E_{in} = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3}{A.\kappa.\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3}{4.\pi.r^2.\kappa.\varepsilon_0} = \frac{\rho.\frac{1}{3}.r}{\kappa.\varepsilon_0}$$

Logo, vetorialmente, o campo elétrico interno é:

$$\vec{E}_{in} = \frac{\rho.r}{3.\kappa.\varepsilon_0}\ \hat{r}$$

b Diferença de potencial entre o centro e a superfície da esfera

Perceba que no intervalo $0 < r < a$ não há mudança no comportamento do campo elétrico, por isso podemos simplesmente integrar o campo $\vec{E}_{in}$ nos limites sem mais problemas. Obtemos então:

$$\Delta V = -\int \vec{E}_{in} \cdot d\vec{r} = -\int_a^0 \frac{\rho.r}{3.\kappa.\varepsilon_0}\ dr = -\frac{\rho}{3.\kappa.\varepsilon_0}.\int_a^0 r\ dr = -\frac{\rho}{3.\kappa.\varepsilon_0}.\left[\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_a^0$$

Assim, concluímos que:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{3.\kappa.\varepsilon_0}.\left[\frac{0^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{\rho.a^2}{6.\kappa.\varepsilon_0}$$

CAPÍTULO

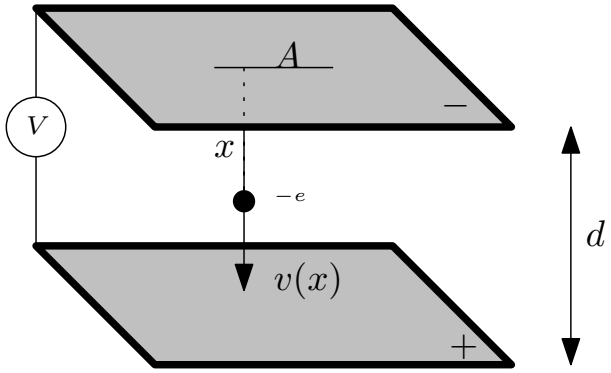
6

CORRENTE ELÉTRICA

"O homem é a medida de todas as coisas - das que são, enquanto são, das que não são, enquanto não são. Mas essa medida é sempre parcial e provisória."

PROTÁGORAS

6.1 Analisando uma válvula diodo



a Velocidade dos elétrons

Como o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial eletrostático, e o mesmo é constante, podemos afirmar que:

$$E = \frac{V}{d}$$

Sendo que d é a distância entre as placas. Agora, aplicando a Segunda Lei de Newton, podemos descobrir a aceleração do elétron:

$$F_e = e.E = m_e.a \Rightarrow a = \frac{e.E}{m} = \frac{V.e}{m.d}$$

Por fim, aplicamos a Equação de Torricelli usada de forma incansável na Cinemática para descobrir a velocidade atingida pelo elétron ao percorrer uma distância x:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta x = v_0^2 + 2.\frac{V.e}{m.d}.x \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2.\frac{V.e}{m.d}.x} \Rightarrow v = v_0.\sqrt{1 + \frac{2.V.e}{m.d.v_0^2}.x}$$

b Densidade de elétrons em função da distância percorrida

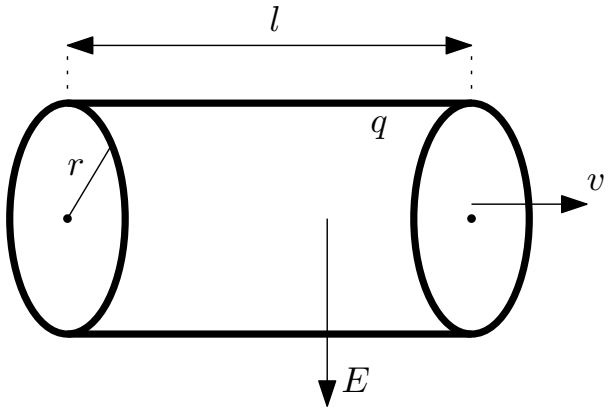
Se há uma corrente elétrica i e a seção transversal do fio tem área A, então a densidade de corrente pode ser escrita como:

$$j = \frac{i}{A} = n.q.v = n.e.v$$

Sendo n o número de portadores de carga elétrica por unidade de volume, que é oque queremos:

$$n = \frac{i}{A.e.v} = \frac{i}{A.e.v_0.\sqrt{1 + \frac{2.V.e}{m.d.v_0^2}.x}}$$

6.2 Corrente elétrica gerada por cilindro carregado



Podemos, usando uma superfície gaussiana cilíndrica, aplicar a Lei de Gauss. Como foi falado no enunciado, apenas a área lateral do cilindro contribuirá para o fluxo. Portanto, obtemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E.2.\pi.r.l = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow q = E.2.\pi.r.l.\varepsilon_0$$

Agora, partindo da ideia de densidade de corrente elétrica podemos determinar a corrente elétrica gerada pelo movimento do cilindro:

$$j = \frac{i}{A} = \rho.v \Rightarrow i = \rho.v.A = \frac{q}{\tau}.v.A = \frac{q}{l.A}.v.A = \frac{q}{l}.v$$

Substituindo a carga q do cilindro que calculamos pela Lei de Gauss:

$$i = \frac{E.2.\pi.r.l.\varepsilon_0}{l}.v = 2.\pi.r.\varepsilon_0.v.E$$

Substituindo os valores:

$$i = 2.\pi.5.10^{-2}.8,85.10^{-12}.10.10^{-2}.500.10^2 = 1,39.10^{-8}\ A$$

6.3 Dissipação de energia de uma lâmpada

Pela Segunda Lei de Ohm, temos que:

$$R = \frac{\rho.l}{A}$$

Mas no nosso caso, a resistividade ρ não é uma constante, ela varia com a temperatura:

$$\rho = \rho_0.(1 + \alpha.\Delta T)$$

Substituindo, obtemos:

$$R = \frac{\rho_0.(1 + \alpha.\Delta T).l}{A} = \frac{\rho_0.l}{A}.(1 + \alpha.\Delta T)$$

Perceba que $\rho_0.\frac{l}{A}$ é a resistência inicial R_0 quando temos $\Delta T = 0\ K$. Portanto:

$$R = R_0.(1 + \alpha.\Delta T)$$

A potência dissipada no resistor é $P = i.\Delta V$, mas com a Primeira Lei de Ohm, podemos reescrever isso como:

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{\Delta V^2}{R_0.(1 + \alpha.\Delta T)}$$

Queremos saber a temperatura que o resistor estará quando a potência dissipada for conhecida, então devemos isolar a temperatura final T:

$$R_0.(1 + \alpha.\Delta T) = \frac{\Delta V^2}{P} \Rightarrow 1 + \alpha.\Delta T = \frac{\Delta V^2}{R_0.P} \Rightarrow \alpha.\Delta T = \frac{\Delta V^2}{R_0.P} - 1$$

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{1}{\alpha}.\left(\frac{\Delta V^2}{R_0.P} - 1\right) \Rightarrow T = \frac{1}{\alpha}.\left(\frac{\Delta V^2}{R_0.P} - 1\right) + T_0$$

Agora precisamos apenas substituir os valores dados:

$$T = \frac{1}{4,5.10^{-3}}.\left(\frac{9^2}{4,5.1,5} - 1\right) + 20 = 2,4.10^3\ ^\circ C$$

6.4 Condutividade do ar na atmosfera da Terra

A densidade de corrente elétrica para uma superfície esférica é:

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{4.\pi.r^2}$$

Pela Primeira Lei de Ohm, podemos escrever a condutividade em função do campo elétrico e da densidade de corrente elétrica:

$$j = \sigma.E \Rightarrow \sigma = \frac{j}{E} = \frac{i}{4.\pi.r^2.E}$$

Substituindo os valores dados, obtemos:

$$\sigma = \frac{1800}{4.\pi.(6,37.10^6)^2.100} = 3,53.10^{-14}\ \frac{1}{\Omega.m}$$

A atmosfera terrestre é uma péssima condutora. O ar no geral é um isolante, por isso você **não** é eletrocutado ao colocar o dedo perto de uma tomada.

6.5 A resistência elétrica de um capacitor

a Capacitor de placas paralelas

A capacitância no caso do capacitor de placas paralelas é:

$$C = \varepsilon.\frac{A}{d} = \kappa.\varepsilon_0.\frac{A}{d}$$

Aplicando a Segunda Lei de Ohm, teremos algo útil envolvendo as dimensões do capacitor:

$$R = \rho.\frac{l}{A} = \rho.\frac{d}{A} \Rightarrow \frac{A}{d} = \frac{\rho}{R}$$

Substituindo, podemos isolar a resistência R, que é a resistência elétrica imposta pelo capacitor:

$$C = \kappa.\varepsilon_0.\frac{\rho}{R} \Rightarrow R = \frac{\kappa.\varepsilon_0.\rho}{C} = \frac{\kappa.\varepsilon_0}{\sigma.C}$$

b Validade geral

O item ***(b)*** desta questão é inútil, pois podemos provar a validade geral da equação encontrada indicará, automaticamente, que ela é válida para os capacitores cilíndrico e esférico*.

A Lei de Gauss nos diz que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{Q}{\kappa.\varepsilon_0} = \frac{C.V}{\kappa.\varepsilon_0}$$

Podemos ainda obter a corrente elétrica a partir da densidade de corrente elétrica:

$$i = \oint \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

E aplicando a Primeira Lei de Ohm, obtemos:

$$i = \oint \sigma.\vec{E} \cdot d\vec{A} = \sigma. \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Obtivemos esta integral ao aplicarmos a Lei de Gauss, podemos substituir o resultando obtido lá:

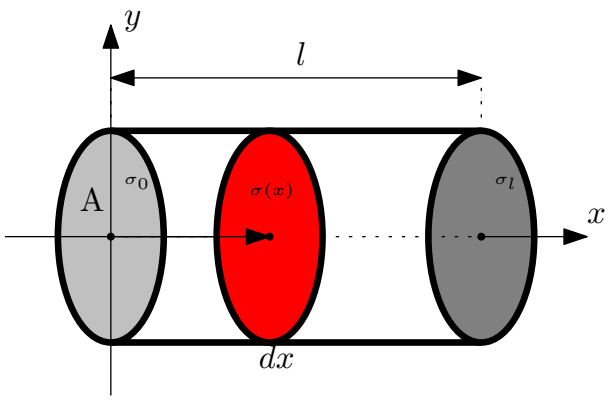
$$i = \sigma.\frac{C.V}{\kappa.\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{V}{i} = \frac{\kappa.\varepsilon_0}{\sigma.C}$$

Como $V = R.i$, obtemos que vale, no geral, a relação:

$$R = \frac{\kappa.\varepsilon_0}{\sigma.C}$$

*Caso queira, faça o mesmo processo do item ***(a)***, mas saiba que será chato.

6.6 Cilindro com condutividade variável



Primeiramente, temos que descobrir a função $\sigma(x)$ que descreve a condutividade do cilindro em cada posição x de sua altura. Logo, teremos:

$$\frac{\sigma(x)-\sigma_0}{x-0}=\frac{\sigma_l-\sigma_0}{l-0}\Rightarrow\frac{\sigma(x)-\sigma_0}{x}=\frac{\sigma_l-\sigma_0}{l}\Rightarrow\sigma(x)=(\sigma_l-\sigma_0).\frac{x}{l}+\sigma_0$$

Se pegarmos um pedaço do cilindro de altura dx, teremos, consequentemente, uma resistência dR dada por:

$$dR=\rho.\frac{dx}{S}=\frac{1}{\sigma}.\frac{dx}{S}=\frac{1}{(\sigma_l-\sigma_0).\frac{x}{l}+\sigma_0}.\frac{dx}{S}$$

Para encontrarmos a resistência total, somamos (integramos) todos esses resistores de comprimento dx, desde a posição $x=0$ até $x=l$.

$$R=\int_0^l\frac{1}{(\sigma_l-\sigma_0).\frac{x}{l}+\sigma_0}.\frac{1}{S}\,dx=\frac{1}{S}.\int_0^l\frac{1}{(\sigma_l-\sigma_0).\frac{x}{l}+\sigma_0}\,dx$$

Para integrar, faremos uma substituição simples:

$$\beta\rightarrow=(\sigma_l-\sigma_0).\frac{x}{l}+\sigma_0$$

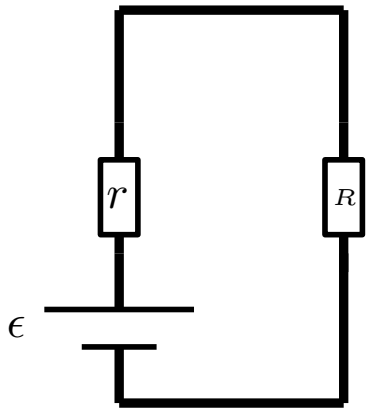
$$d\beta\rightarrow\frac{\sigma_l-\sigma_0}{l}.dx$$

Obviamente os limites de integração também mudarão! Então teremos:

$$R=\frac{1}{S}.\int_{\sigma_0}^{\sigma_l}\frac{1}{\beta}.\frac{1}{\frac{\sigma_l-\sigma_0}{l}}\,d\beta=\frac{1}{S}.\frac{l}{\sigma_l-\sigma_0}.\int_{\sigma_0}^{\sigma_l}\frac{1}{\beta}\,d\beta=\frac{1}{S}.\frac{l}{\sigma_l-\sigma_0}.\Big[ln|\beta|\Big]\Big|_{\sigma_0}^{\sigma_l}$$

$$R=\frac{1}{S}.\frac{l}{\sigma_l-\sigma_0}.ln\left[\frac{\sigma_l}{\sigma_0}\right]$$

6.7 Bateria real alimentando circuito



a Potência fornecida máxima

A potência fornecida ao resistor é a potência total fornecida pela bateria menos a potência consumida pela própria bateria, oque resta é mandado ao resistor.

$$P_R = P - P_r = i.\epsilon - i^2.r$$

Pela Primeira Lei de Ohm, podemos determinar a corrente elétrica, tendo em vista que a bateria forma uma associação em série com o resistor:

$$\epsilon = (r+R).i \Rightarrow i = \frac{\epsilon}{r+R}$$

Substituindo, a potência fornecida ao resistor é:

$$P_R = \frac{\epsilon}{r+R}.\epsilon - \left(\frac{\epsilon}{r+R}\right)^2.r$$

Queremos saber o valor de R que faz com que P_R seja maximizada. Então, derivamos P_R com relação à R e igualamos o resultado à zero.

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{\epsilon}{r+R}.\epsilon - \left(\frac{\epsilon}{r+R}\right)^2.r\right) = 0 \Rightarrow \epsilon^2.\frac{d}{dR}\left(\frac{1}{r+R} - \frac{r}{(r+R)^2}\right) = 0$$

$$\epsilon^2.\left(\frac{1}{(R+r)^2} + \frac{2.(R+r)}{(R+r)^4}\right) = 0$$

Ao simplificarmos, obtemos facilmente:

$$R = r$$

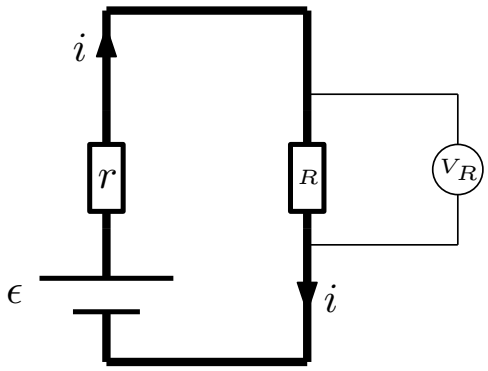
b Potência fornecida e potência dissipada

Como temos a condição em que $R = r$, então a potência fornecida e dissipada são iguais.

$$P_{fornecida} = \frac{\epsilon}{r+r}.\epsilon - \left(\frac{\epsilon}{r+r}\right)^2.r = \frac{\epsilon^2}{2.r} - \frac{\epsilon^2}{4.r} = \frac{\epsilon^2}{4.r}$$

$$P_{dissipada} = i^2.R = \left(\frac{\epsilon}{r+R}\right)^2.R = \left(\frac{\epsilon}{r+r}\right)^2.r = \frac{\epsilon^2}{4.r}$$

6.8 Analisando outro circuito resistivo



a Valor da resistência externa

Simplesmente aplicamos a Primeira Lei de Ohm para o resistor, assim obtemos:

$$V_R = R.i \Rightarrow R = \frac{V_R}{i} = \frac{1,4}{1} = 1,4\ \Omega$$

b Resistência interna da bateria

Como a resistência da bateria e a externa estão em série, a resistência equivalente é a soma. Aplicando a Primeira Lei de Ohm novamente:

$$\epsilon = (R + r).i \Rightarrow r = \frac{\epsilon}{i} - R = \frac{1,5}{1} - 1,4 = 0,1\ \Omega$$

c Taxa de conversão de energia química em energia elétrica por unidade de tempo

Estamos falando exatamente da potência fornecida pela bateria. Como sabemos a força eletromotriz e a corrente elétrica do circuito, a potência fica:

$$P = i.\epsilon = 1.1,5 = 1,5\ W$$

d Potência dissipada no resistor

Aplicamos novamente a equação clássica da potência:

$$P_R = i.V_R = 1.1,4 = 1,4\ W$$

e Perda de potência na bateria

Novamente, usamos a mesma equação da potência, mas agora com a resistência da bateria:

$$P_\epsilon = i.V_\epsilon = i^2.r = 1^2.0,1 = 0,1\ W$$

6.9 Aquecedor elétrico

A eficiência (ou rendimento) é sempre a razão entre a energia que entrou no sistema e o trabalho resultante gerado pelo mesmo:

$$\eta = \frac{E_0}{W}$$

A energia dada ao sistema é aquela suficiente para fazer a água variar sua temperatura. Pela Calorimetria, sabemos que:

$$E_0 = Q = m.c.\Delta T$$

E a potência pode ser expressa em função do trabalho por unidade de tempo, mas também em função da diferença de potencial e da corrente elétrica do circuito, por isso obtemos a seguinte relação para o trabalho:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = i.V \Rightarrow W = i.V.\Delta t$$

Substituindo na equação inicial, obtemos:

$$\eta = \frac{m.c.\Delta T}{i.V.\Delta t}$$

Como o ponto de fervura da água é aos $100°C$, tem densidade de $1\ \frac{Kg}{L}$ e calor específico de $4186\ \frac{J}{Kg.K}$, obtemos que a eficiência é:

$$\eta = \frac{0,5.4186.(100-20)}{5.110.6.60} = 0,846 = 84,6\%$$

6.10 Solução iônica de HCl

a Razão da concentração de íons

Durante a seção, obtivemos a relação:

$$\epsilon = -\frac{D_+}{e.\mu_+}.ln\left[\frac{n(x_2)}{n(x_1)}\right]$$

Precisamos apenas desenvolver esta equação afim de isolar a razão entre as concentrações:

$$-\epsilon = \frac{D_+}{e.\mu_+}.ln\left[\frac{n(x_2)}{n(x_1)}\right] \Rightarrow ln\left[\frac{n(x_2)}{n(x_1)}\right] = -\frac{\epsilon.e.\mu_+}{D_+} \Rightarrow \frac{n(x_2)}{n(x_1)} = exp\left(\frac{-\epsilon.e.\mu_+}{D_+}\right)$$

b Fator de Boltzman

Se oque temos na direita é o fator de Boltzman

$$exp\left(-\frac{E}{K.T}\right)$$

Então obtemos a seguinte relação:

$$exp\left(-\frac{E}{K.T}\right) = exp\left(\frac{-\epsilon.e.\mu_+}{D_+}\right) \Rightarrow \frac{E}{K.T} = \epsilon.e.\frac{\mu_+}{D_+}$$

Como $E = e.\epsilon$, conseguimos simplificar a relação:

$$\frac{1}{K.T} = \frac{\mu_+}{D_+} \Rightarrow \frac{D_+}{\mu_+} = K.T$$

c Força eletromotriz resultante

Usando a equação inicial, e substituindo o fator de Boltzman:

$$\epsilon = -\frac{D_+}{e.\mu_+}.ln\left[\frac{n(x_2)}{n(x_1)}\right] = \frac{D_+}{e.\mu_+}.ln\left[\frac{n(x_1)}{n(x_2)}\right]$$

Consideraremos a temperatura ambiente como 300 K ($27°C$), obtemos:

$$\epsilon = \frac{1,38.10^{-23}.300}{1,6.10^{-19}}.ln[10] = 0,06\ V$$

CAPÍTULO

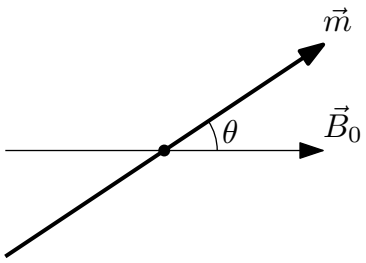
7

CAMPO MAGNÉTICO

"A ciência é mais do que um corpo de conhecimento; é uma maneira de pensar. Um modo cético de interrogarmos o universo, com plena consciência de nossa propensão ao erro."

Carl Sagan

7.1 Oscilação da agulha de uma bússola



No geral, pela Segunda Lei de Newton da rotação, podemos escrever o torque total sobre a agulha em função da aceleração angular da mesma e de seu momento de inércia:

$$\sum \tau = I.\alpha$$

O módulo do torque resultante é:

$$\sum \tau = m.B_0.sen(\theta)$$

Para ângulos muito pequenos, ou seja, na condição em que a agulha não gira muito, vale que $sen(\theta) \approx \theta$, logo:

$$\sum \tau = m.B_0.\theta$$

Portanto, obtemos:

$$|\vec{B}_0 \cdot m.B_0.\theta = I.\alpha = I.\ddot{\theta} \Rightarrow I.\ddot{\theta} - m.B_0.\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{m.B_0}{I}.\theta = 0$$

Com essa EDO, concluímos que:

$$\omega = 2.\pi.\nu = \frac{m.B_0}{I} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2.\pi}.\frac{m.B_0}{I}$$

Logo, medindo o valor da frequência, podemos facilmente determinar $m.B_0$.

7.2 Campo magnético gerado pelo dipolo magnético

a Comparando os dipolos elétrico e magnético

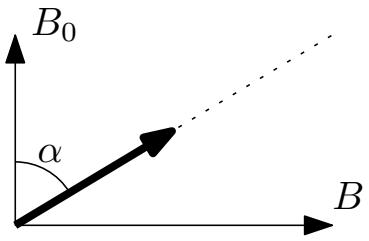
O campo elétrico gerado pelo dipolo elétrico é, como vimos nos capítulos passados:

$$\vec{E} = \frac{\vec{p}}{2.\pi.\varepsilon_0.r^3}$$

Fazemos agora as substituições ordenadas no enunciado:

$$\vec{B} = \frac{\vec{m}}{2.\pi.\frac{1}{\mu_0}.r^3} = \frac{\mu_0.\vec{m}}{2.\pi.r^3}$$

b Interação entre agulhas e campo magnético



Com a figura ao lado, que pode ser construída interpretando o enunciado, podemos enxergar o problema melhor. Portanto, teremos:

$$tg(\alpha) = \frac{B}{B_0} = \frac{\frac{\mu_0.m}{2.\pi.r^3}}{B_0} = \frac{\mu_0.\vec{m}}{2.\pi.r^3.B_0}$$

7.3 Elétron orbitando a Terra

a Frequência angular de rotação

No movimento circular uniforme, sempre teremos $\vec{v}$ perpendicular à $\vec{B}$. Então, aplicando a Segunda Lei de Newton com a força magnética sendo nossa resultante centrípeta, obtemos:

$$\sum F_r = m.a_r = m_e.\frac{v^2}{r} \Rightarrow q.v.B = m_e.\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \frac{q.B}{m_e.r} = \frac{e.B}{m_e}.r$$

Sabemos que a frequência angular pode ser dada por $\omega = 2.\pi.\nu$ e por $v = \omega.r$. Logo, podemos descobrir a frequência de rotação do elétron:

$$\frac{v}{r} = 2.\pi.\nu \Rightarrow \nu = \frac{\frac{v}{r}}{2.\pi} = \frac{v}{2.\pi.r} = \frac{\frac{e.B}{m_e}.r}{2.\pi.r} = \frac{e.B}{2.\pi.m_e}$$

O enunciado nos dá o valor do campo magnético em Gauss, mas no Sistema Internacional a unidade de medida é Tesla. Por isso, usaremos a seguinte conversão:

$$1\ G = 10^{-4}\ T$$

Então, obtemos:

$$\nu = \frac{1,6.10^{-19}.0,5.10^{-4}}{2.\pi.9,1.10^{-31}} = 1,4.10^6\ Hz = 1,4\ MHz$$

b Raio de curvatura do elétron

Vamos usar o vínculo geométrico $v = \omega.r$ para descobrir o raio da órbita descrita pelo elétron. Reescrevendo a energia cinética, obtemos:

$$K = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m_e.(\omega.r)^2$$

Mas $\omega = 2.\pi.\nu$, e sabemos quanto vale ν. Assim, podemos isolar apenas o raio r:

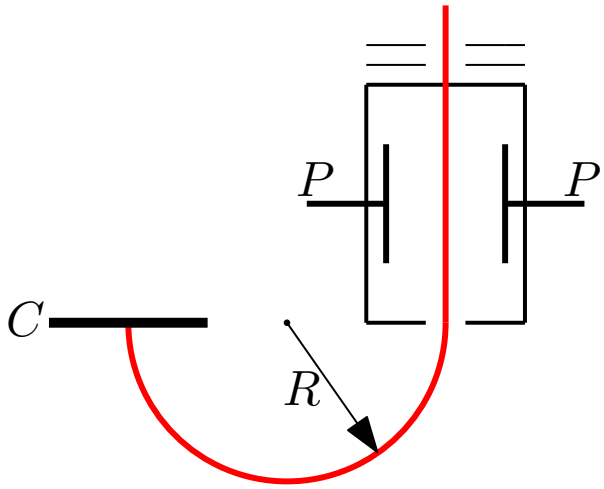
$$K = \frac{1}{2}.m_e.(2.\pi.\nu.r)^2 = 2.m_e.(\pi.\nu)^2.r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{K}{2.m_e.(\pi.\nu)^2} \Rightarrow r = \frac{1}{\pi.\nu}.\sqrt{\frac{K}{2.m_e}}$$

O valor da energia cinética foi dado em eV, mas deve ser usada em J para que a unidade do raio da trajetória tenha a unidade correta. Portanto, multiplicamos a energia cinética pela carga do elétron para que possamos descobrir seu valor em Joules:

$$r = \frac{1}{\pi.1,4.10^6}.\sqrt{\frac{10^3.1,6.10^{-19}}{2.9,1.10^{-31}}} = 2,1\ m$$

Ou seja, se pudéssemos ver os elétrons que formam a aurora boreal, iríamos ver que eles giram descrevendo uma circunferência de raio r.

7.4 Espectrógrafo de massa



Primeiramente, podemos descobrir com que velocidade os íons passa para a região que tem apenas campo magnético $\vec{B'}$. Entre as placas P, perceba que o íon deve sofrer uma força resultante nula, somente assim ele conseguirá passar pela fina fenda. Então aplicando a condição de equilíbrio, teremos:

$$F_{ele} + F_{mag} = 0 \Rightarrow q.E - q.v.B = 0 \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

Então a única forma de um íon não sofrer nenhum desvio e passar pela fenda e se sua velocidade for v.

Para a segunda região, onde há apenas campo magnético, podemos aplicar casualmente a Segunda Lei de Newton usando a força magnética como resultante centrípeta:

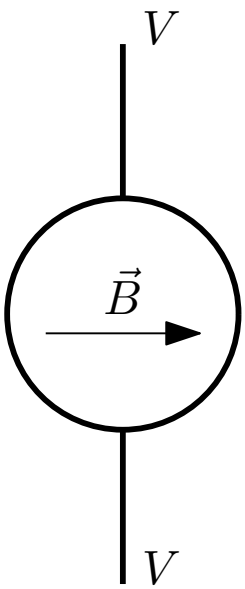
$$\sum F_r = m.a_r = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow q.v.B' = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow q.B' = m.\frac{v}{R} \Rightarrow R = m.\frac{v}{q.B'}$$

$$R = m.\frac{\frac{E}{B}}{q.B'} = m.\frac{E}{q.B.B'}$$

Fixando a carga do íon em e, obtemos que $R \propto m$, ou seja, o raio de curvatura cresce linearmente com a massa do íon.

$$R = m.\frac{E}{e.B.B'}$$

7.5 Espira circular interagindo com campo magnético



Podemos calcular o módulo do momento de dipolo magnético associado à espira:

$$m = i.S = i.\pi.r^2 = i.\pi.a^2$$

Em posse do momento de dipolo magnético, podemos calcular a variação do momento angular gerado pelo pulso:

$$\Delta L = \tau.\Delta t = m.B.t = i.\pi.a^2.B.t = \pi.a^2.B.(i.t) = \pi.a^2.B.q$$

Agora podemos calcular o trabalho gerado sobre a espira para que ela seja torcida em um ângulo máximo θ_0, lembrando que o torque sobre a mesma é $-\kappa.\theta$:

$$W = \int \tau \ d\theta = -\int_{\theta_0}^{0} \kappa.\theta \ d\theta = -\kappa. \int_{\theta_0}^{0} \theta \ d\theta = -\kappa. \left[\frac{\theta^2}{2}\right]\Bigg|_{\theta_0}^{0} = \frac{\kappa.\theta_0^2}{2}$$

Lembre que pelo Teorema do Trabalho-Energia cinética, o trabalho deve ser igual à variação de energia cinética. Como inicialmente estamos partindo do repouso, obtemos:

$$W = K_f - K_i = K_f \Rightarrow \frac{\kappa.\theta_0^2}{2} = \frac{1}{2}.I.\omega^2 \Rightarrow \kappa.\theta_0^2 = I.\omega^2$$

Por fim, temos que lembrar que $\omega = \frac{\Delta L}{I}$. Logo, obtemos:

$$\kappa.\theta_0^2 = I.\left(\frac{\Delta L}{I}\right)^2$$

Por fim, apenas isolamos o ângulo máximo θ_0:

$$\kappa.\theta_0^2 = \frac{\Delta L^2}{I} = \frac{(\pi.a^2.B.q)^2}{I} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi.a^2.B.q}{\sqrt{\kappa.I}}$$

CAPÍTULO

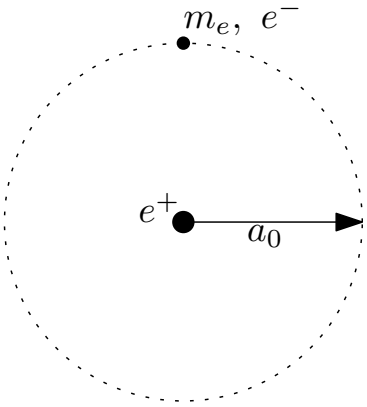
8

LEI DE AMPÈRE

"O mistério último da existência não é algo que possamos resolver com equações ou experimentos, mas sim com humildade e reverência perante a sublime complexidade do real."

Werner Heisenberg

8.1 Modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio



a Raio da primeira órbita circular

Aplicando a Segunda Lei de Newton com a força eletrostática sendo a resultante centrípeta, obtemos:

$$\sum F_r = m.a_r = m_e.\frac{v^2}{r} = m_e.\frac{v^2}{a_0} \Rightarrow \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r^2} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{a_0^2} = m_e.\frac{v^2}{a_0}$$

$$v^2 = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.a_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.a_0}}$$

Como o módulo do momento angular é $\hbar$, poderemos usar a nossa velocidade v descoberta anteriormente e isolar o raio da primeira órbita a_0 que queremos descobrir:

$$L = m.v.r = m_e.\sqrt{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.a_0}}.a_0 = \hbar \Rightarrow m_e^2.\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.a_0}.a_0^2 = \hbar^2$$

$$m_e.a_0.\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.e^2 = \hbar^2 \Rightarrow a_0 = \frac{4.\pi.\varepsilon_0.\hbar^2}{m_e.e^2}$$

Encontramos o valor literal, mas substituindo os dados numéricos, obtemos:

$$a_0 = \frac{4.\pi.8,85.10^{-12}.(1,055.10^{-34})^2}{9,11.10^{-31}.(1,6.10^{-19})^2} = 5,3.10^{-11}\ m = 0,53.10^{-10}\ m = 0,53\ \text{Å}$$

b Corrente elétrica associada ao movimento circular do elétron

Perceba que a cada 1 período o elétron completa 1 revolução, ou seja, se olharmos apenas para 1 ponto da trajetória a cada 1 período passará 1 elétron (carga e). Portanto, a corrente elétrica, partindo da definição, é:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{e}{T}$$

Como a órbita é circular, o período de revolução é facilmente encontrado usando a relação da velocidade:

$$v = \frac{2.\pi.r}{T} \Rightarrow T = \frac{2.\pi.r}{v}$$

Podemos usar a velocidade que obtivemos explicitamente, mas perceba que a expressão ficaria muito grande. Uma alternativa é expressar a velocidade a partir do momento angular:

$$L = \hbar \Rightarrow m.v.r = m_e.v.a_0 = \hbar \Rightarrow v = \frac{\hbar}{m_e.a_0}$$

Então o período é:

$$T = \frac{2.\pi.a_0}{\frac{\hbar}{m_e.a_0}} = \frac{2.\pi.m_e.a_0^2}{\hbar}$$

Agora podemos voltar à corrente elétrica:

$$i = \frac{e}{\frac{2.\pi.m_e.a_0^2}{\hbar}} = \frac{e.\hbar}{2.\pi.m_e.a_0^2}$$

Substituindo os valores dados, obtemos:

$$i = \frac{1,6.10^{-19}.1,055.10^{-34}}{2.\pi.9,11.10^{-31}.(5,3.10^{-11})^2} = 1,05.10^{-3}\ A = 1,05\ mA$$

c Campo magnético gerado pela órbita do elétron no núcleo

Para calcularmos o campo magnético (mais especificamente sua magnitude), podemos usar a Lei de Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2}$$

Como o vetor radial é sempre perpendicular à trajetória do elétron e a distância r é constante e igual a a_0, pois estamos no movimento circular uniforme, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dl}{a_0^2} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.a_0^2}.\int dl$$

Agora integramos em cima de toda a trajetória do elétron:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.a_0^2}.\int_0^{2.\pi.a_0} dl = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.a_0^2}.2.\pi.a_0 = \frac{\mu_0.i}{2.a_0}$$

Substituindo os valores numéricos, a grandeza desse campo é:

$$B = \frac{4.\pi.10^{-7}.1,05.10^{-3}}{2.5,3.10^{-11}} = 12,5\ T$$

d Momento de dipolo magnético

A equação do momento de dipolo envolve a corrente elétrica que "fura"a área S, como temos os valores literais da corrente elétrica e da área podemos descobrir também o valor literal do momento de dipolo magnético:

$$\mu_B = i.S = \frac{e.\hbar}{2.\pi.m_e.a_0^2}.\pi.a_0^2 = \frac{e.\hbar}{2.m_e}$$

A razão entre o momento de dipolo magnético e o momento angular é, portanto:

$$\frac{\mu_B}{L} = \frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{\frac{e.\hbar}{2.m_e}}{\hbar} = \frac{e}{2.m_e}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{\mu_B}{L} = \frac{e}{2.m_e} = \frac{1,6.10^{-19}}{2.9,11.10^{-31}} = 9,23.10^{-24}\ A.m^2$$

8.2 Fios paralelos infinitos com corrente elétrica

Pela Lei de Ampère, o módulo do campo magnético gerado num ponto que dista d de um fio que passa uma corrente i é:

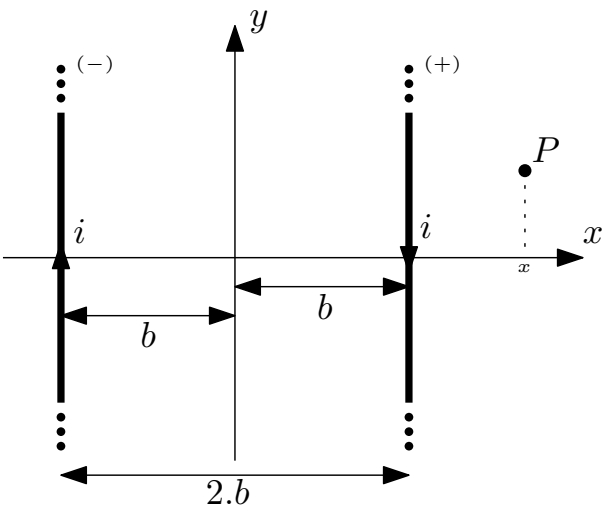
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0.i \Rightarrow B.2.\pi.d = \mu_0.i \Rightarrow B = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.d}$$

Se adotarmos coordenadas cilíndricas*, vetorialmente o campo magnético aponta para $+\hat{\varphi}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.d}\,\hat{\varphi}$$

Pelo nosso sistema de coordenadas, um fio está em coordenada negativa e outro em coordenada positiva, a distância ao ponto P será, respectivamente, dada por d_- e d_+.

a Magnitude do campo magnético para $|x| < b$



Pela Regra da mão direita, podemos verificar que os dois fios geram campos magnéticos no mesmo sentido (entrando na página), por isso o campo resultante no ponto P será a soma dos campos magnéticos gerados por cada fio:

$$B = B_+ + B_- = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.d_+} + \frac{\mu_0.i}{2.\pi.d_-} = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{1}{d_+} + \frac{1}{d_-}\right]$$

Perceba que as distâncias serão:

$$d_+ = b - x \text{ e } d_- = b + x$$

Portanto, teremos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{1}{b-x} + \frac{1}{b+x}\right] = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{b+x+b-x}{(b-x).(b+x)}\right] = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{2.b}{b^2-x^2}\right] = \frac{\mu_0.i}{\pi}.\left[\frac{b}{b^2-x^2}\right]$$

b Magnitude do campo magnético para $|x| > b$

Perceba que agora o campo magnético resultante será a subtração dos campos magnéticos gerados por cada fio. Como o valor do módulo é sempre positivo, caso o resultado seja negativo, aplicamos o módulo. Assim, obtemos:

*Que é o ideal quando lidamos com fios

$$B = B_+ - B_- = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.d_+} - \frac{\mu_0.i}{2.\pi.d_-} = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{1}{d_+} - \frac{1}{d_-}\right]$$

Agora as equações da distância serão:

$$d_+ = x - b \text{ e } d_- = x + b$$

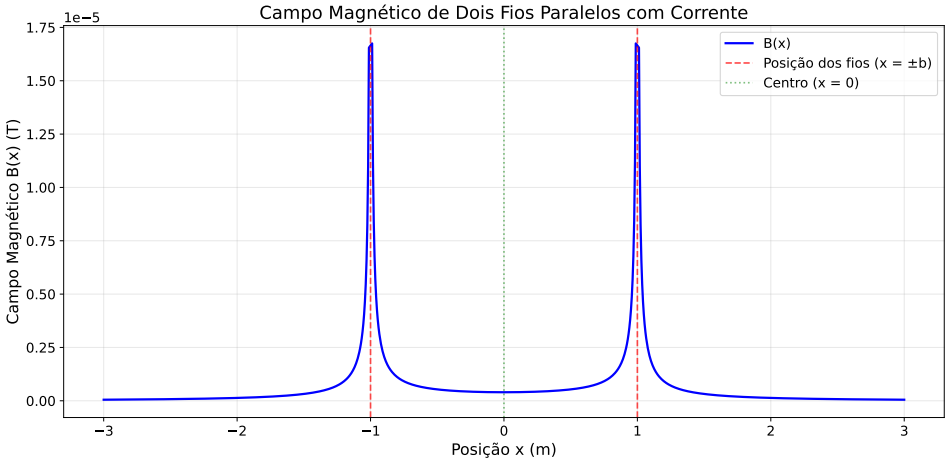
Substituindo, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x+b}\right] = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{x+b-x+b}{(x-b).(x+b)}\right] = \frac{\mu_0.i}{2.\pi}.\left[\frac{2.b}{x^2-b^2}\right] = \frac{\mu_0.i}{\pi}.\left[\frac{b}{x^2-b^2}\right]$$

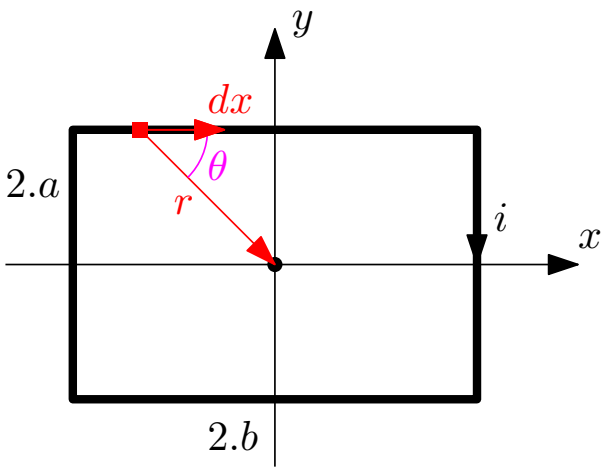
Em módulo, o resultado é o mesmo do item passado.

c Gráfico do campo magnético em função da posição x

Plotando o gráfico percebemos a simetria e os pontos de divergência do campo magnético.



8.3 Espira retangular com corrente elétrica



a Campo magnético no centro da espira

Pela Regra da mão direita, o campo resultante gerado por cada extensão do fio aponta para dentro da folha. Por conta disso, iremos resolver apenas um pedaço do fio e mudaremos apenas os limites de integração para resolver as outras e encontrar o campo magnético total no centro da espira.
Pela Lei de Biot-Savart, o módulo do campo magnético no centro da espira gerado por um pedaço dx de fio será:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dx.sen(\theta)}{r^2}$$

Vamos resolver o trecho superior da espira primeiro, pois sabemos que os outros serão análogos. Observe as seguintes relações:

$$sen(\theta) = \frac{a}{r} \text{ e } r^2 = a^2 + x^2$$

Substituindo na equação do campo magnético, o resultado obtido é:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dx.\frac{a}{r}}{r^2} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dx.a}{r^3} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx$$

Queremos a contribuição do fio inteiro, ou seja, de $-b$ até b.

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int_{-b}^{b} \frac{a}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx$$

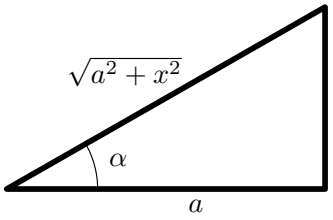
Para resolver essa integral, teremos que usar o método da substituição trigonométrica. Vamos dizer que $x = a.tg(\alpha)$, então $dx = a.sec^2(\alpha).d\alpha$. Por enquanto, esqueçamos dos limites de integração, no final retornaremos com eles:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{a}{(a^2.tg^2(\alpha)+a^2)^{\frac{3}{2}}}.a.sec^2(\alpha)\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{a^2.sec^2(\alpha)}{a^3.(tg^2(\alpha)+1)^{\frac{3}{2}}}\ d\alpha$$

Agora usaremos a identidade trigonométrica que nos diz que $tg^2(x) + 1 = sec^2(x)$. Portanto:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{a^2.sec^2(\alpha)}{a^3.sec^3(\alpha)}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{1}{a}.\int \frac{1}{sec(\alpha)}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{1}{a}.\int cos(\alpha)\ d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{sen(\alpha)}{a}$$



Agora precisamos retornar à variável original para que possamos aplicar os limites de integração anterior. Pelo triângulo ao lado, vale a relação:

$$sen(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Substituindo, obtemos o resultado da integral na variável desejada, então podemos aplicar os limites de integração:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a}\Bigg|_{-b}^{b} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.a}.\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_{-b}^{b} = \frac{2.\mu_0.i}{4.\pi.a}.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Perceba que tanto o fio horizontal superior quanto o inferior retornarão o mesmo resultado. Portanto, chamando de B_h o campo magnético resultante dos fios horizontais, obtemos:

$$B_h = 2.\frac{2.\mu_0.i}{4.\pi.a}.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mu_0.i}{\pi.a}.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Para os fios verticais, o processo é exatamente o mesmo, mas teremos de trocar a por b e vice-versa, por conta do $sen(\theta)$ e dos limites de integração. Nesse caso, teremos também os dois fios com a mesma contribuição, então se B_v é a contribuição dos fios verticais, teremos:

$$B_v = \frac{\mu_0.i}{\pi.b}.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Portanto, o campo magnético resultante será:

$$B = B_h + B_v = \frac{\mu_0.i}{\pi.a}.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\mu_0.i}{\pi.b}.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\mu_0.i}{\pi.\sqrt{a^2+b^2}}.\left[\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right]$$

$$B = \frac{\mu_0.i}{\pi.\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{b^2+a^2}{a.b} = \frac{\mu_0.i}{\pi}.\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a.b}$$

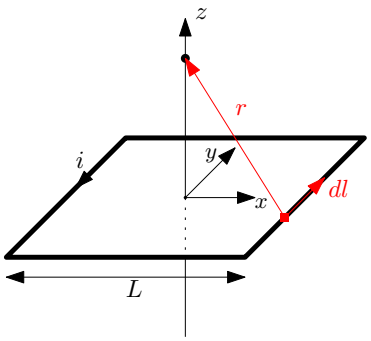
b Condição limite em que $a >> b$

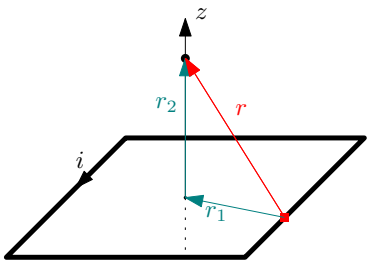
Se $a >> b$, então teremos que $\sqrt{a^2+b^2} \approx \sqrt{a^2} = a$. Então o campo magnético torna-se:

$$B = \frac{\mu_0.i}{\pi}.\frac{a}{a.b} = \frac{\mu_0.i}{\pi}.\frac{1}{b}$$

Se voltarmos ao ***Problema 8.2*** e aplicarmos $x = 0$ na equação do campo magnético obtido em ***a***, verificaremos que o resultado obtido é o mesmo que foi obtido aqui. Portanto, quando fazemos o lado a crescer muito, o campo magnético gerado pela corrente elétrica que passa nele deixa de exercer influência sobre o centro da espira.

8.4 Espira quadrada com corrente elétrica





a Campo magnético no eixo da espira

Pela Lei de Biot-Savart, temos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

Como há simetria, o campo magnético resultado aponta para cima (verifique pela regra da mão direita). Por isso, podemos calcular o campo magnético gerado apenas por 1 dos fios em $\hat{z}$ e depois multiplicar o resultado por 4.
Pela figura podemos determinar os vetores $d\vec{l}$ e $\vec{r}$. São eles:

$$d\vec{l} = dy\ \hat{y}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \left(-\frac{L}{2}\ \hat{x} + y\ \hat{y}\right) + (z\ \hat{z}) = -\frac{L}{2}\ \hat{x} + y\ \hat{y} + z\ \hat{z}$$

Com isso, o produto vetorial é:

$$d\vec{l}\times\vec{r} = (dy\ \hat{y}) \times \left(-\frac{L}{2}\ \hat{x} + y\ \hat{y} + z\ \hat{z}\right) = -\frac{L}{2}.dy\ (\hat{y}\times\hat{x}) + y.dy\ (\hat{y}\times\hat{y}) + z.dy\ (\hat{y}\times\hat{z})$$

$$d\vec{l}\times\vec{r} = -\frac{L}{2}.dy\ (-\hat{z}) + z.dy\ (\hat{x}) = \frac{L}{2}.dy\ \hat{z} + z.dy\ \hat{x}$$

Mas lembre-se que a espira é quadrada, o que significa que a contribuição em $\hat{x}$ de cada espira é igual em módulo e no sentido oposto. Por isso, a componente em $\hat{x}$ pode ser desprezada no produto vetorial, pois oque nos interessa é o campo resultante e não o gerado apenas por 1 fio.

Então campo magnético, substituindo na equação da Lei de Biot-Savart, é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{\frac{L}{2}.dy\ \hat{z}}{\left(\frac{L^2}{4}+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

A soma de 3 quadrados no denominador pode assustar, mas perceba que desses 3, apenas y é uma variável. Então podemos chamar $\frac{L^2}{4}+z^2$ de β^2. Assim temos algo mais familiar:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{\frac{L}{2}.dy\ \hat{z}}{(\beta^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi}\ \hat{z}.\int \frac{1}{(\beta^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ dy$$

Queremos a contribuição de todo o fio, por isso:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi}\ \hat{z}.\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{(\beta^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\ dy$$

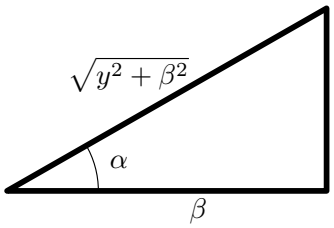
Já vimos esta integral, ela pode ser resolvida por substituição trigonométrica. Fazendo $y = \beta.tg(\alpha)$, temos $dy = \beta.sec^2(\alpha).d\alpha$. Vamos esquecer os limites de integração por enquanto, então:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi}\ \hat{z}.\int \frac{1}{(\beta^2+\beta^2.tg^2(\alpha))^{\frac{3}{2}}}.\beta.sec^2(\alpha)\ d\alpha = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi}\ \hat{z}.\int \frac{\beta.sec^2(\alpha)}{\beta^3.(1+tg^2(\alpha))^{\frac{3}{2}}}\ d\alpha$$

Recorde-se que $1 + tg^2(x) = sec^2(x)$. Portanto, temos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi}\ \hat{z}.\int \frac{sec^2(\alpha)}{\beta^2.sec^3(\alpha)}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi.\beta^2}\ \hat{z}.\int \frac{1}{sec(\alpha)}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi.\beta^2}\ \hat{z}.\int cos(\alpha)\ d\alpha$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi.\beta^2}.sen(\alpha)\ \hat{z}$$



Montando um triângulo com base na relação de α é mais simples de enxergarmos quem é $sen(\alpha)$ em função da variável y original:

$$sen(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{\beta^2+y^2}}$$

Agora que retornamos à variável original podemos aplicar os limites de integração e descobrir a contribuição total de um fio na direção $\hat{z}$:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi.\beta^2}.\frac{y}{\sqrt{\beta^2+y^2}}\ \hat{z}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{\mu_0.i.L}{8.\pi.\beta^2}.\frac{L}{\sqrt{\beta^2+\frac{L^2}{4}}}\ \hat{z} = \frac{\mu_0.i.L^2}{8.\pi.\beta^2}.\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\frac{L^2}{4}}}\ \hat{z}$$

Vamos expressar o β como a soma original:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0.i.L^2}{8.\pi.\left(\frac{L^2}{4}+z^2\right)}.\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2+\frac{L^2}{4}}}\ \hat{z} = \frac{\mu_0.i.L^2}{8.\pi.\left(\frac{L^2}{4}+z^2\right).\sqrt{\frac{L^2}{2}+z^2}}\ \hat{z}$$

O campo total no ponto especificado será o campo gerado por um único fio multiplicado por 4:

$$\vec{B} = 4.\vec{B}_1 = \frac{\mu_0.i.L^2}{2.\pi.\left(\frac{L^2}{4}+z^2\right).\sqrt{\frac{L^2}{2}+z^2}}\ \hat{z}$$

b Campo magnético resultante quando $z >> L$

No caso em que $z >> L$ o ideal é que consigamos encontrar termos do tipo $\frac{L}{z}$ pois eles tendem à zero no limite tratado. Então podemos manipular a equação obtida para que esses termos surjam:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i.L^2}{2.\pi.z^2.\left(\frac{L^2}{4.z^2}+1\right).z.\sqrt{\frac{L^2}{2.z^2}+1}}\ \hat{z} \approx \frac{\mu_0.i.L^2}{2.\pi.z^2.(0+1).z.\sqrt{0+1}}\ \hat{z} = \frac{\mu_0.i.L^2}{2.\pi.z^3}\ \hat{z}$$

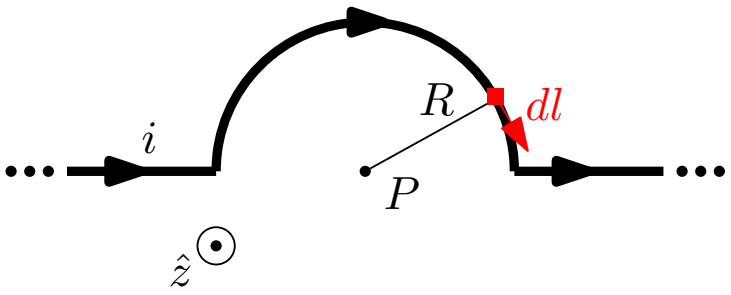
Perceba que o momento de dipolo magnético da espira é exatamente $i.L^2\ \hat{z}$, assim obtemos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.\vec{m}}{2.\pi.z^3}$$

Quando estamos muito longe, o campo magnético que sentimos é o mesmo que o gerado por um dipolo magnético $\vec{m}$ a uma distância z.

8.5 Campo magnético gerado por fios infinitos

a Distribuição com simetria que gera anulamento



Lembre que pela Lei de Biot-Savart devemos considerar o produto vetorial $d\vec{l} \times \hat{r}$. Perceba que as porções retilíneas do fio são paralelos ou antiparalelas ao vetor $\hat{r}$ que indica a distância da distribuição infinitesimal de corrente elétrica ao ponto P.

Por isso, o campo magnético só dependerá da parte circular do fio, nesse trecho, todos os vetores $d\vec{l}$ são perpendiculares aos seus respectivos vetores $\hat{r}$ e como o raio é constante a distância r^2 é constante e igual ao raio da circunferência, portanto:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{1}{R^2}.\int dl$$

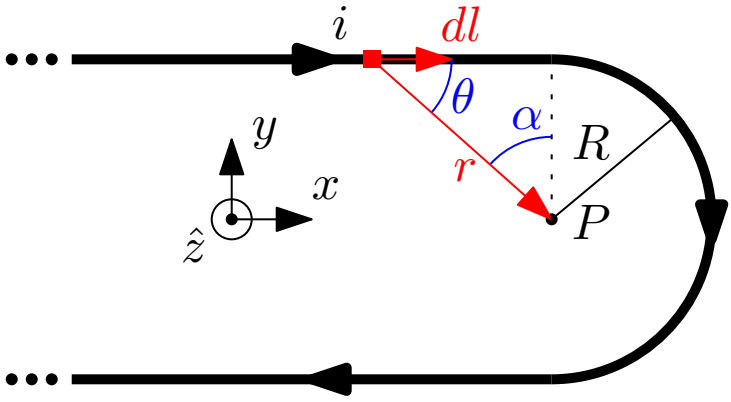
Só temos meia circunferência, então seu comprimento é $\pi.R$, então:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{1}{R^2}.\int_0^{\pi.R} dl = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{1}{R^2}.\pi.R = \frac{\mu_0.i}{4.R}$$

Com a Regra da mão direita, podemos concluir que o campo magnético deve apontar para dentro da página:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0.i}{4.R}\ \hat{z}$$

b Distribuição com simetria que reforça o campo magnético



O campo magnético gerado pela corrente elétrica no fio retilíneo é direcionado para a direção $-\hat{z}$, isso vale para ambos os fios, ou seja, podemos calcular o campo magnético gerado apenas por 1 dos fios e depois multiplicar o resultado por 2.

Pela Lei de Biot-Savart, temos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dl.sen(\theta)}{r^2}$$

Podemos expressar o $sen(\theta)$ em função dos parâmetros gerados pela distribuição do fio, daí temos:

$$sen(\theta) = \frac{R}{r}$$

Portanto:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dl.R}{r^3} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dx.R}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi}.\int \frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Vimos esta integral antes, resolvemos a mesma por substituição trigonométrica. Fazendo $x = R.tg(\alpha)$ e $dx = R.sec^2(\alpha).d\alpha$. Então:

$$B = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi}.\int \frac{R.sec^2(\alpha).d\alpha}{(R^2.tg^2(\alpha)+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Nós queremos a contribuição de todo o fio, ou seja, devemos integrar de $\frac{-\pi}{2}$ até 0. Caso soe estranho, imagine o comprimento dl no ponto $-\infty$ do fio, perceba que o ângulo α tenderá cada vez mais a um ângulo reto.

Substituindo os limites:

$$B = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi}.\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \frac{R.sec^2(\alpha).d\alpha}{(R^2.tg^2(\alpha)+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi}.\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \frac{R.sec^2(\alpha).d\alpha}{R^3.(tg^2(\alpha)+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0.i.R}{4.\pi}.\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \frac{sec^2(\alpha).d\alpha}{R^2.sec^3(\alpha)}$$

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \frac{1}{sec(\alpha)}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} cos(\alpha)\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.sen(\alpha)\Big|_{\frac{-\pi}{2}}^{0}$$

Aplicando os limites, obtemos o campo magnético gerado por 1 dos fios:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.[sen(0) - sen\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)] = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}$$

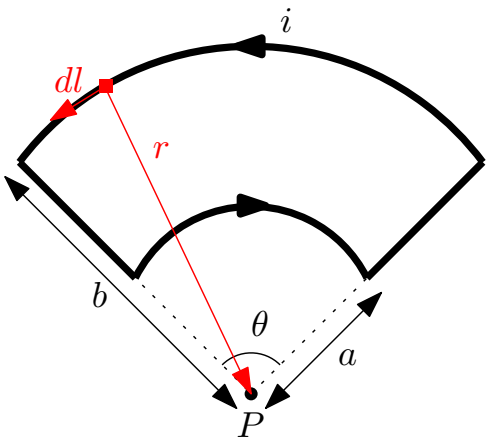
O gerado pelos dois fios é, portanto:

$$B = 2.\frac{\mu_0.i}{4.\pi.R} = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.R}$$

E o campo magnético gerado pelo fio que está encurvado é o mesmo que foi calculado no item ***a***. Portanto, o campo magnético resultante é:

$$B = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.R} + \frac{\mu_0.i}{4.R} = \frac{\mu_0.i}{4.R}.\left(1+\frac{2}{\pi}\right) \text{ consequentemente, temos } \vec{B} = -\frac{\mu_0.i}{4.R}.\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\hat{z}$$

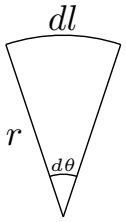
8.6 Campo magnético gerado por arco circular



Os comprimentos de fio que ligam os arcos uns aos outros são paralelos ou antiparalelos ao vetor que liga $d\vec{l}$ ao ponto P, por isso o campo magnético gerado por esses fios é nulo, pois $B \propto |d\vec{l} \times \hat{r}|$. Para os arcos, perceba que sempre $d\vec{l} \perp \hat{r}$, então o módulo do produto vetorial é simplesmente dl. Como se tratam de arcos de circunferência, a distância r é constante e igual ao raio da circunferência.

Pela regra da mão direita, o campo magnético de cada arco será em sentidos opostos, mas ambos na direção $\hat{z}$. Com base no nosso sistema de coordenadas, aplicando a Lei de Biot-Savart, obtemos:

$$\vec{B} = \left[\frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \int \frac{dl}{b^2} - \frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \int \frac{dl}{a^2} \right] \hat{z}$$



Partindo da definição de radianos, podemos reescrever o comprimento dl:

$$dl = r.d\theta$$

É mais justo escrever o comprimento assim, pois sabemos a abertura angular dos arcos. Então a expressão fica[†]:

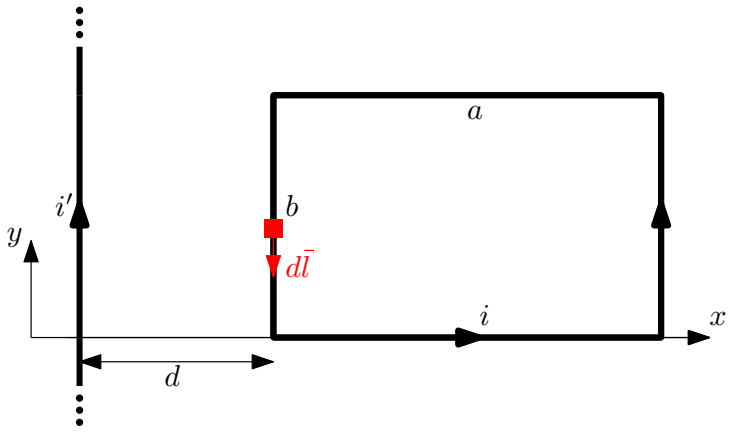
$$\vec{B} = \left[\frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \int_0^{\theta} \frac{b}{b^2} \, d\theta' - \frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \int_0^{\theta} \frac{a}{a^2} \, d\theta' \right] \hat{z} = \left[\frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \frac{1}{b} \, \theta' \Big|_0^{\theta} - \frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \frac{1}{a} \, \theta' \Big|_0^{\theta} \right] \hat{z}$$

$$\vec{B} = \left[\frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \frac{1}{b} . \theta - \frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \frac{1}{a} . \theta \right] \hat{z} = \frac{\mu_0 . i}{4.\pi} . \theta . \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] \hat{z} = \frac{\mu_0 . i . \theta}{4.\pi} . \frac{a - b}{a.b} \, \hat{z}$$

Como $a < b$, podemos concluir que o campo magnético resultante aponta para dentro da página.

[†]Escreveremos $dl = r.d\theta'$ apenas para não confundir o θ da integração com o dos limites.

8.7 Força magnética sobre espira retangular e fio infinito



Aplicando a Lei de Ampère, podemos descobrir o campo magnético gerado pelo fio que passa corrente elétrica i':

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0.i' \Rightarrow B.2.\pi.x = \mu_0.i' \Rightarrow B = \frac{\mu_0.i'}{2.\pi.x}$$

A força magnética sobre cada comprimento de fio da espira será dado por:

$$\vec{F} = i. \oint d\vec{l} \times \vec{B}$$

Perceba, aplicando a Regra da mão direita, que a força sobre os fios horizontais são iguais em módulo, mas aponta em sentidos contrários, portanto as forças se anularão. Por isso, consideraremos apenas a força resultante sobre os fios verticais, como vale a superposição, a resultante é a soma. Para o fio vertical da espira que dista d do fio infinito, a força é:

$$\vec{F_1} = i. \int_0^b (-dy\ \hat{y}) \times \left(-\frac{\mu_0.i'}{2.\pi.x}\ \hat{z} \right) = \frac{\mu_0.i.i'}{2.\pi.d}.(\hat{y} \times \hat{z}). \int_0^b dy = \frac{\mu_0.i.i'}{2.\pi.d}.\hat{x}.y \Big|_0^b = \frac{\mu_0.i.i'.b}{2.\pi.d}\ \hat{x}$$

Para o fio que dista $d + a$ o processo é o mesmo. Integrando e fazendo corretamente o produto vetorial, obtemos:

$$\vec{F_2} = -\frac{\mu_0.i.i'.b}{2.\pi.(d+a)}\ \hat{x}$$

Logo, a força resultante sobre a espira é:

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{\mu_0.i.i'.b}{2.\pi.d}\ \hat{x} - \frac{\mu_0.i.i'.b}{2.\pi.(d+a)}\ \hat{x} = \frac{\mu_0.i.i'.b}{2.\pi}.\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right)\ \hat{x}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0.i.i'.b}{2.\pi}.\left(\frac{d+a-d}{d.(d+a)} \right)\ \hat{x} = \frac{\mu_0.i.i'}{2.\pi}.\frac{b.a}{d.(d+a)}\ \hat{x}$$

8.8 Campo magnético entre duas bobinas

a Campo magnético no meio das espiras

Com a Lei de Biot-Savart, o campo magnético resultante num ponto que dista z de uma espira com corrente elétrica i é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Pela regra da mão direita, o campo magnético resultante deve ser orientado na direção z. Portanto, o módulo do campo magnético resultante é:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dl}{r^2}.sen(\theta) = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dl}{r^2}.\frac{a}{r} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.a.\int \frac{dl}{r^3}$$

Perceba que pela própria simetria, o valor de r é constante, por isso o mesmo sai da integral. Assim, integramos apenas o comprimento da espira:

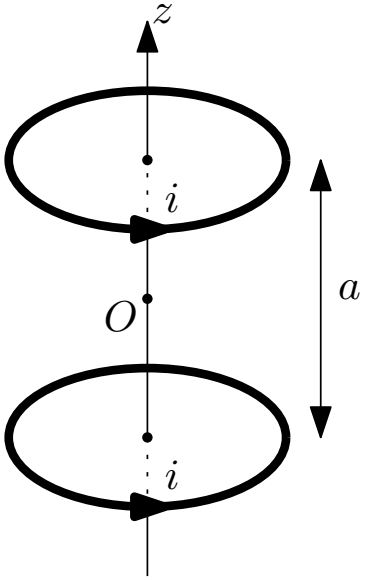
$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{a}{r^3}.\int_0^{2.\pi.a} dl = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\frac{a}{r^3}.2.\pi.a$$

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = z^2 + a^2 \Rightarrow r = \sqrt{z^2 + a^2} = (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

Concluímos então:

$$B = \frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Perceba que no caso, temos duas espiras e nosso ponto de medida do campo magnético é entre elas, distando $z = \frac{a}{2}$ de ambas. Verificando pela regra da mão direita, os campos magnéticos são somados, por isso obtemos:

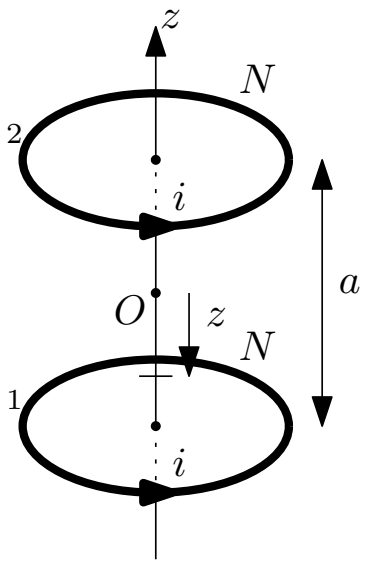
$$B = \frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{(\frac{a^2}{4} + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{(\frac{a^2}{4} + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu_0.i.\frac{a^2}{(\frac{a^2}{4} + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu_0.i.\frac{a^2}{(\frac{5.a^2}{4})^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{\mu_0.i.a^2}{a^3} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{\mu_0.i}{a}$$

Vetorialmente, temos:

$$\vec{B} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{\mu_0.i}{a}\ \hat{z}$$

b O campo magnético é constante no centro da bobina



Agora estamos em uma altura z arbitrária. Sabemos que a distância entre as bobinas é a, então o campo magnético resultante é:

$$B = \frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{(z_1^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{(z_2^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{((\frac{a}{2}+z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{((\frac{a}{2}-z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Perceba que temos bobinas e não espiras. Como as bobinas têm espessura desprezível, todas as N espiras geram o mesmo campo magnético no ponto em questão, assim precisamos apenas multiplicar o campo pelo número de espiras:

$$B = N.\frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{((\frac{a}{2}+z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + N.\frac{\mu_0.i}{2}.\frac{a^2}{((\frac{a}{2}-z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\left[\frac{1}{((\frac{a}{2}+z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((\frac{a}{2}-z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Para o caso em que z é pequeno, podemos fazer uma expansão de Taylor. Lembre que a série de Taylor em torno de um ponto a é:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dz^n}(a).\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Queremos mostrar que as primeira e segunda derivadas se anulam, por isso faremos a expansão até o terceiro termo. Logo:

$$B(z) = B(0) + B'(0).z + \frac{B''(0).z^2}{2}$$

Vamos calcular a primeira derivada do campo magnético primeiro:

$$B' = \frac{dB}{dz} = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{((\frac{a}{2}+z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((\frac{a}{2}-z)^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\frac{dB}{dz} = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\frac{d}{dz}\left[\left((\frac{a}{2}+z)^2+a^2\right)^{\frac{-3}{2}} + \left((\frac{a}{2}-z)^2+a^2\right)^{\frac{-3}{2}}\right]$$

A derivada da soma é a soma das derivadas. Derivando cada termo individualmente, obtemos:

$$\frac{dB}{dz} = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\left[\frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz}\right]$$

Sendo:

$$f_1 = \left((\frac{a}{2} + z)^2 + a^2 \right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$f_2 = \left((\frac{a}{2} - z)^2 + a^2 \right)^{\frac{-3}{2}}$$

As derivadas de primeira ordem são:

$$\frac{df_1}{dz} = -3.\left((\frac{a}{2} + z)^2 + a^2 \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} + z \right)$$

$$\frac{df_2}{dz} = 3.\left((\frac{a}{2} - z)^2 + a^2 \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} - z \right)$$

Somando os resultados, poderemos manipular algebricamente e chegar no resultado desejado:

$$\frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz} = -3.\left((\frac{a}{2} + z)^2 + a^2 \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} + z \right) + 3.\left((\frac{a}{2} - z)^2 + a^2 \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} - z \right)$$

$$\frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz} = -3.\left(\frac{a^2}{4} + z^2 + a.z + a^2 \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} + z \right) + 3.\left(\frac{a^2}{4} + z^2 - a.z + a^2 \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} - z \right)$$

$$\frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz} = -3.\left(\frac{5.a^2}{4} + z^2 + a.z \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} + z \right) + 3.\left(\frac{5.a^2}{4} + z^2 - a.z \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} - z \right)$$

Vamos chamar $\frac{5.a^2}{4} + z^2$ de β^2 apenas para escrever menos.

$$\frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz} = -3.(\beta^2 + a.z)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} + z \right) + 3.(\beta^2 - a.z)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} - z \right)$$

Substituindo na expressão do campo magnético:

$$\frac{dB}{dz} = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\left[-3.(\beta^2 + a.z)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} + z \right) + 3.(\beta^2 - a.z)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} - z \right) \right]$$

Para $z = 0$, a variação do campo magnético é:

$$\frac{dB}{dz}(0) = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\left[-3.\left(\frac{5.a^2}{4} \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} \right) + 3.\left(\frac{5.a^2}{4} \right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2} \right) \right] = 0$$

Agora devemos verificar a segunda derivada do campo magnético também na origem. Teremos o seguinte:

$$B'' = \frac{d^2B}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dB}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\left[\frac{df_1}{dz}+\frac{df_2}{dz}\right]\right) = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{df_1}{dz}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{df_2}{dz}\right)\right]$$

Como já temos a primeira derivada das funções f nossa vida será facilita, devemos derivar as derivadas:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{df_1}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(-3.\left((\frac{a}{2}+z)^2+a^2\right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2}+z\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\frac{df_1}{dz}\right) = -3.\left[\left((\frac{a}{2}+z)^2+a^2\right)^{\frac{-5}{2}} - 5.\left((\frac{a}{2}+z)^2+a^2\right)^{\frac{-7}{2}}.\left(\frac{a}{2}+z\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{df_2}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(3.\left((\frac{a}{2}-z)^2+a^2\right)^{\frac{-5}{2}}.\left(\frac{a}{2}-z\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\frac{df_2}{dz}\right) = 3.\left[-\left((\frac{a}{2}-z)^2+a^2\right)^{\frac{-5}{2}} + 5.\left((\frac{a}{2}-z)^2+a^2\right)^{\frac{-7}{2}}.\left(\frac{a}{2}-z\right)^2\right]$$

Novamente, oque nos interessa é o valor da derivada na origem. Como as derivadas ficaram muito extensas, vamos aplicar a condição antes de substituir na expressão do campo magnético:

$$\frac{d^2f_1}{dz^2}(0) = -3.\left[\left(\frac{5.a^2}{4}\right)^{\frac{-5}{2}} - 5.\left(\frac{5.a^2}{4}\right)^{\frac{-7}{2}}.\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$\frac{d^2f_2}{dz^2}(0) = 3.\left[-\left(\frac{5.a^2}{4}\right)^{\frac{-5}{2}} + 5.\left(\frac{5.a^2}{4}\right)^{\frac{-7}{2}}.\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

A soma é, portanto, o dobro de qualquer uma das derivadas de segunda ordem:

$$\frac{d^2f_1}{dz^2}(0) + \frac{d^2f_2}{dz^2}(0) = 6.\left[-\left(\frac{5.a^2}{4}\right)^{\frac{-5}{2}} + 5.\left(\frac{5.a^2}{4}\right)^{\frac{-7}{2}}.\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

Temos um termo positivo e outro negativo, então vamos verificar o resultado desta operação:

$$\frac{d^2f_1}{dz^2}(0) + \frac{d^2f_2}{dz^2}(0) = 6.\left[-\left(\frac{4}{5.a^2}\right)^{\frac{5}{2}} + 5.\left(\frac{4}{5.a^2}\right)^{\frac{7}{2}}.\frac{a^2}{4}\right] = 6.\left[-\left(\frac{4}{5.a^2}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{4}{5.a^2}\right)^{\frac{7}{2}-1}\right]$$

$$\frac{d^2f_1}{dz^2}(0) + \frac{d^2f_2}{dz^2}(0) = 6.\left[-\left(\frac{4}{5.a^2}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{4}{5.a^2}\right)^{\frac{5}{2}}\right] = 0$$

Logo, substituindo o resultado na derivada de segunda ordem do campo magnético, obtemos:

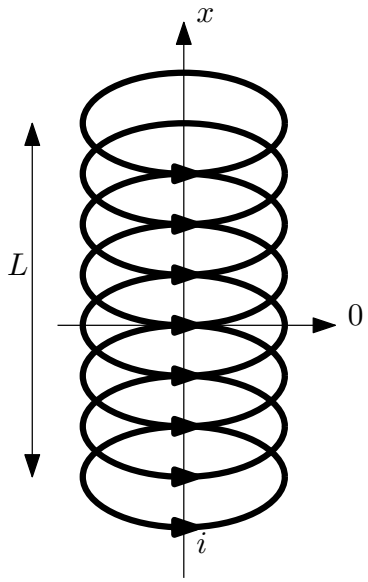
$$\frac{d^2B}{dz^2}(0) = \frac{N.\mu_0.i.a^2}{2}.\left[\frac{d^2f_1}{dz^2}(0) + \frac{d^2f_2}{dz^2}(0)\right] = 0$$

Finalmente podemos voltar à Série de Taylor, e concluir que o campo magnético total nas proximidades da origem é realmente constante:

$$B(z) = B(0) + 0.z + 0.\frac{z^2}{2} = B(0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{\mu_0.i}{a}$$

8.9 Solenoide finito

a Campo magnético dentro do solenoide



Obtivemos, no ***Problema*** anterior, que cada espira que dista z do ponto em que estamos medindo o campo magnético contribui com

$$B = \frac{\mu_0.I}{2}.\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como o campo resultante será a soma das espiras do solenoide, diremos que o campo magnético gerado por cada espira é uma fração dB do campo total:

$$dB = \frac{\mu_0.dI}{2}.\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sabemos que há n espiras por unidade de comprimento, logo em um pedaço dx', distando x' da origem, há $n.dx'$. Por isso, a corrente associada à este comprimento do solenoide é $dI = i.n.dx'$, portanto:

$$dB = \frac{\mu_0.i.n.dx'}{2}.\frac{a^2}{((x-x')^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como a origem do sistema está no centro do solenoide, devemos integrar em $\pm\frac{L}{2}$. Assim, obtemos:

$$B = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\mu_0.i.n}{2}.\frac{a^2}{((x-x')^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx' = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{2}.\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{((x-x')^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ dx'$$

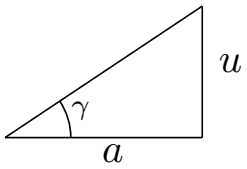
Vamos fazer uma substituição simples de $u = x - x'$, ou seja, $du = -dx'$. Como é uma substituição simples, iremos também alterar a variável dos limites de integração:

$$B = \frac{-\mu_0.i.n.a^2}{2}.\int_{x+\frac{L}{2}}^{x-\frac{L}{2}} \frac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ du = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{2}.\int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \frac{1}{(u^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ du$$

Já vimos este tipo de integral de forma excessiva neste capítulo, resolveremos ela por uma substituição trigonométrico. Fazemos $u = a.tg(\gamma)$ e $du = a.sec^2(\gamma).d\gamma$, e agora sim esqueceremos os limites por um momento:

$$B = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{2}.\int \frac{1}{(a^2.tg^2(\gamma)+a^2)^{\frac{3}{2}}}.a.sec^2(\gamma)\ d\gamma = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{2}.\int \frac{a.sec^2(\gamma)}{a^3.(tg^2(\gamma)+1)^{\frac{3}{2}}}\ d\gamma$$

$$B = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{2}.\int \frac{sec^2(\gamma)}{a^2.sec^3(\gamma)}\ d\gamma = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{2.a^2}.\int cos(\gamma)\ d\gamma = \frac{\mu_0.i.n}{2}.sen(\gamma)$$



Com o triângulo ao lado fica mais claro indicar quanto vale $sen(\gamma)$ na variável original.

$$sen(\gamma) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

Substituindo, podemos aplicar os limites de integração:

$$B = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}}\Bigg|_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[\frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{L}{2}\right)^2+a^2}} - \frac{x-\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}\right]$$

$$B = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[\frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{L}{2}\right)^2+a^2}} + \frac{-x+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}\right]$$

Agora podemos calcular o valor no centro do solenoide:

$$B(0) = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[\frac{0+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(0+\frac{L}{2}\right)^2+a^2}} + \frac{-0+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(0-\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}\right] = \mu_0.i.n.\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+a^2}}$$

É muito comum que o comprimento do solenoide seja muito maior que o raio das espiras, considerando isto, obtemos:

$$B(0) \approx \mu_0.n.i.\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}} = \mu_0.n.i$$

No extremo, obtemos:

$$B\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[\frac{\frac{L}{2}+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{2}\right)^2+a^2}} + \frac{-\frac{L}{2}+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}\right] = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}$$

Novamente, para $L >> a$, obtemos:

$$B\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\frac{L}{L} = \frac{\mu_0.i.n}{2} = \frac{B(0)}{2}$$

É fácil verificar que $B(\frac{L}{2}) = B(-\frac{L}{2})$, ou seja:

$$B\left(\frac{L}{2}\right) = B\left(-\frac{L}{2}\right) = \frac{B(0)}{2}$$

b Caso em que $x >> a$ e $x >> L$

Já calculamos o campo magnético resultante dentro do solenoide:

$$B = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[\frac{x+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{L}{2}\right)^2+a^2}} + \frac{-x+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2+a^2}}\right]$$

Oque nos resta é manipular esta equação afim de fazer surgir possíveis aproximações que podem ser feitas considerando $x >> L$, a. A primeira aproximação é muito nítida, vamos colocar $x \pm \frac{L}{2}$ em evidência nos denominadores:

$$B = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[\frac{x+\frac{L}{2}}{|x+\frac{L}{2}|}.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x+\frac{L}{2}}\right)^2}} + \frac{-x+\frac{L}{2}}{|x-\frac{L}{2}|}.\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x-\frac{L}{2}}\right)^2}}\right]$$

$$B = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x+\frac{L}{2}}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x-\frac{L}{2}}\right)^2}}\right]$$

Como $x >> L$ e $x >> a$, temos que a fração elevada ao quadrado é muito pequena, por isso uma aproximação se torna válida:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x+\frac{L}{2}}\right)^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{a}{x+\frac{L}{2}}\right)^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{x-\frac{L}{2}}\right)^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{a}{x-\frac{L}{2}}\right)^2$$

Substituindo na expressão do campo magnético, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.i.n}{2}.\left[1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{a}{x+\frac{L}{2}}\right)^2 - 1 + \frac{1}{2}.\left(\frac{a}{x-\frac{L}{2}}\right)^2\right] = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{4}.\left[\frac{1}{(x-\frac{L}{2})^2} - \frac{1}{(x+\frac{L}{2})^2}\right]$$

Ainda temos uma equação que relaciona x e L através de uma soma, então podemos aplicar ainda outra aproximação. Agora colocamos x em evidência:

$$B = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{4}.\left[\frac{1}{x^2.(1-\frac{L}{2.x})^2} - \frac{1}{x^2.(1+\frac{L}{2.x})^2}\right] = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{4.x^2}.\left[\frac{1}{(1-\frac{L}{2.x})^2} - \frac{1}{(1+\frac{L}{2.x})^2}\right]$$

Vamos expandir novamente as frações:

$$\frac{1}{(1-\frac{L}{2.x})^2} \approx 1 + 2.\frac{L}{2.x}$$

$$\frac{1}{(1+\frac{L}{2.x})^2} \approx 1 - 2.\frac{L}{2.x}$$

Substituindo na equação do campo magnético:

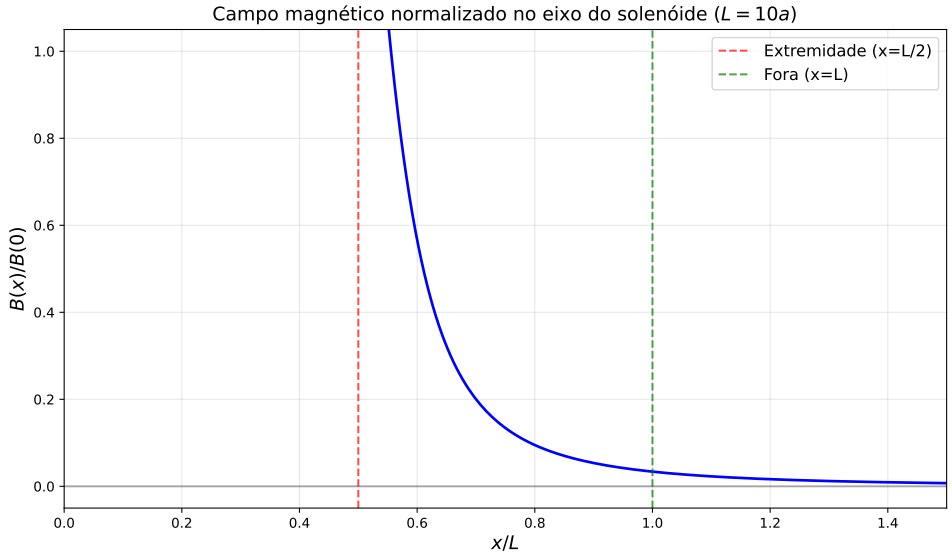
$$B = \frac{\mu_0.i.n.a^2}{4.x^2}.\left[1 + 2.\frac{L}{2.x} - 1 + 2.\frac{L}{2.x}\right] = \frac{\mu_0.i.n.a^2.L}{2.x^3}$$

Podemos multiplicar e dividir por π, assim surgirá uma grandeza interessante:

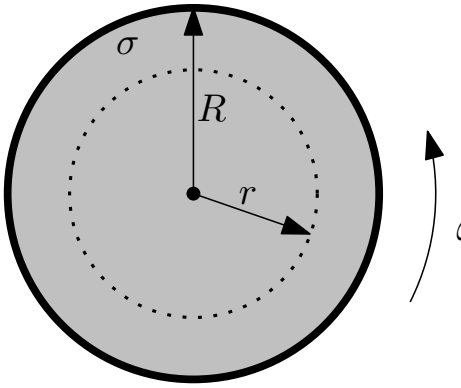
$$B = \frac{\mu_0}{2.\pi.x^3}.i.(n.L.\pi.a^2) = \frac{\mu_0}{2.\pi.x^3}.m$$

Sendo m o momento de dipolo magnético.

c Gráfico do comportamento do campo magnético



8.10 Disco circular de material isolante carregado



a Campo magnético no centro do disco

Pela Lei de Biot-Savart, é fácil mostrar que o campo magnético no centro de uma espira circular deve ser dado por:

$B = \frac{\mu_0.i}{2.r}$, ou seja, infinitesimalmente, temos $dB = \frac{\mu_0}{2.r}.di$

Se temos a densidade de carga superficial, não é difícil calcularmos a carga associada à uma espira de raio arbitrário r:

$$\sigma = \frac{q}{S} \Rightarrow q = \sigma.S = \sigma.\pi.r^2$$

A corrente, que é a variação dos portadores de carga q em função do tempo, é encontrada derivando a carga que encontramos:

$i = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T}$, isto é, a corrente elétrica é a carga total que flui em função do período

O período é sempre o comprimento da órbita circular dividido pela velocidade linear, ou seja:

$$T = \frac{l}{v} = \frac{2.\pi.r}{v} = \frac{2.\pi.r}{\omega.r} = \frac{2.\pi}{\omega}$$

A corrente elétrica é então:

$$i = \frac{q}{2.\pi}.\omega = \frac{\sigma.\pi.r^2}{2.\pi}.\omega = \frac{\sigma.\omega.r^2}{2}$$

Então o diferencial da corrente elétrica é:

$$\frac{d}{dr}i = \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma.\omega.r^2}{2}\right) = \sigma.\omega.r \Rightarrow di = \sigma.\omega.r.dr$$

Finalmente podemos substituir o diferencial de corrente elétrica no campo magnético:

$$dB = \frac{\mu_0}{2.r}.\sigma.\omega.r.dr = \frac{\mu_0}{2}.\sigma.\omega.dr \Rightarrow B = \int_0^R \frac{\mu_0}{2}.\sigma.\omega\ dr = \frac{\mu_0}{2}.\sigma.\omega.\int_0^R dr = \frac{\mu_0}{2}.\sigma.\omega.R$$

Vetorialmente, o campo magnético será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}.\sigma.R.\vec{\omega}$$

b O momento de dipolo magnético

O momento de dipolo magnético pode ser escrito em função da corrente elétrica e da área circulada por esta:

$$m = i.A \Rightarrow dm = A.di$$

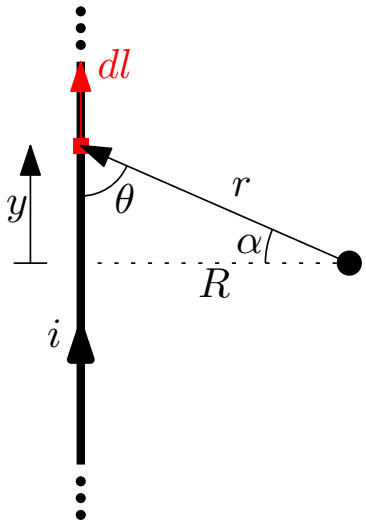
Então podemos substituir o diferencial da corrente encontrado no item passado e integrar para descobrirmos o momento de dipolo magnético total:

$$dm = A.\sigma.\omega.r.dr = \pi.r^2.\sigma.\omega.r.dr \Rightarrow m = \int_0^R \pi.r^2.\sigma.\omega.r\ dr = \pi.\omega.\sigma.\int_0^R r^3\ dr = \pi.\omega.\sigma.\frac{R^4}{4}$$

Vetorialmente, vale o mesmo do item anterior:

$$\vec{m} = \pi.\sigma.\frac{R^4}{4}.\vec{\omega}$$

8.11 Campo gerado por corrente elétrica em fio tridimensional



a Campo gerado por corrente elétrica em fio retilíneo e infinito

Já sabemos, pela regra da mão direita, que o campo gerado circulará o fio, então oque devemos fazer é calcular a intensidade do mesmo. Pela Lei de Biot-Savart, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\oint \frac{|d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dl.sen(\theta)}{r^2}$$

Pelo nosso sistema de coordenadas, temos que $dl = dy$. Da Trigonometria do triângulo formado por R e r, temos $sen(\theta) = \frac{R}{r}$ e pelo Teorema de Pitágoras, vale que $r = \sqrt{R^2 + y^2}$.

Fazendo as substituições, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dy.R}{r^3} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{dy.R}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Novamente, como vimos em outros ***Problemas***, esta integral é resolvida por uma substituição trigonométrica. Fazendo $y = R.tg(\alpha)$, e consequentemente $dy = R.sec^2(\alpha).d\alpha$, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{R.sec^2(\alpha).R}{(R^2+R^2.tg^2(\alpha))^{\frac{3}{2}}}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{R^2.sec^2(\alpha)}{R^3.(1+tg^2(\alpha))^{\frac{3}{2}}}\ d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{sec^2(\alpha)}{R.(1+tg^2(\alpha))^{\frac{3}{2}}}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi}.\int \frac{sec^2(\alpha)}{R.sec^3(\alpha)}\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.\int cos(\alpha)\ d\alpha$$

Queremos a contribuição de todo o fio, por isso devemos integrar de $-\frac{\pi}{2}$ até $\frac{\pi}{2}$, pois o fio é infinito. Assim, obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(\alpha)\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.sen(\alpha)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.2 = \frac{\mu_0.i}{2.\pi.R}$$

Se considerarmos apenas a metade do fio, integraremos de 0 até $-\frac{\pi}{2}$ (ou de $-\frac{\pi}{2}$ ate 0, tanto faz). Com veremos que:

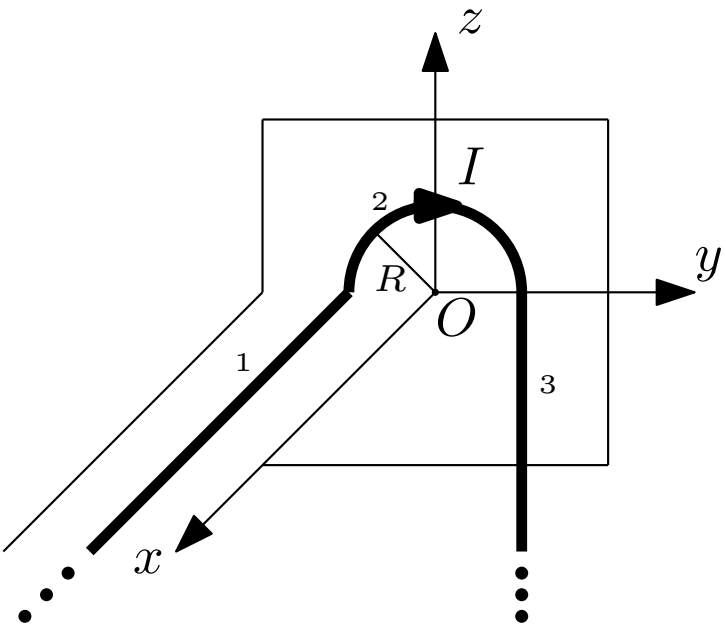
$$B = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(\alpha)\ d\alpha = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.sen(\alpha)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}.1 = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}$$

Que é exatamente metade do campo magnético calculado inicialmente. Por isso, cada metade do fio contribuirá com metade do campo magnético resultante.

Vetorialmente não esqueça que o campo magnético circula o fio, ou seja, aponta na direção φ.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.i}{4.\pi.R}\ \hat{\varphi}$$

b Distribuição tridimensional de corrente elétrica



O problema pode parecer um "bicho de 7 cabeças"à priori, porém se observamos mais friamente, todas as distribuições foram já resolvidas: temos 2 fios retilíneos e 1 fio em forma de arco de circunferência. Teremos, portanto, os seguintes campos magnéticos respeitando o eixo de coordenadas:

$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}\ (-\hat{z}) = -\frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}\ \hat{z}$$

$$\vec{B_2} = \frac{\mu_0.I}{4.R}\ (-\hat{x}) = -\frac{\mu_0.I}{4.R}\ \hat{x}$$

$$\vec{B_3} = \frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}\ (-\hat{x}) = -\frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}\ \hat{x}$$

Lembre que todos esses resultados são facilmente provados com o auxílio da Regra da mão direita e das Leis de Ampère e Biot-Savart. Vale a superposição, ou seja, o campo magnético resultante é a soma dos campos magnéticos individuais gerado por cada fio:

$$\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3} = -\frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}\ \hat{z} - \frac{\mu_0.I}{4.R}\ \hat{x} - \frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}\ \hat{x}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}.\left[\hat{z} + \pi\ \hat{x} + \hat{x}\right] = -\frac{\mu_0.I}{4.\pi.R}.\left[(\pi+1)\ \hat{x} + \hat{z}\right]$$

CAPÍTULO

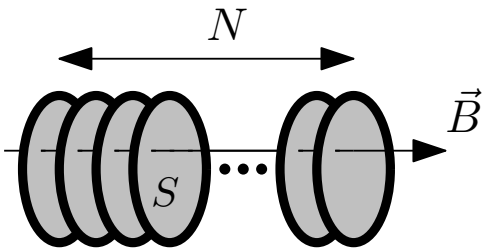
9

LEI DA INDUÇÃO

"A sabedoria não consiste em acumular informações, mas em discernir o que é essencial do que é acidental, o que é eterno do que é efêmero."

Thomas Aquinas

9.1 Funcionamento de um fluxômetro



O fluxo total dentro da bobina será:

$$\Phi = \vec{B} \cdot (N.\vec{S}) = N.\vec{B} \cdot \vec{S} = N.B.S.cos(0^\circ) = N.B.S$$

A variação do fluxo na bobina estará associado à uma força eletromotriz induzida, então podemos dizer que:

$$\varepsilon = R.i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Lembre que a corrente elétrica também é escrita em função de um diferencial no tempo. Assim, obtemos:

$$R.\frac{dQ}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow R.dQ = -d\Phi$$

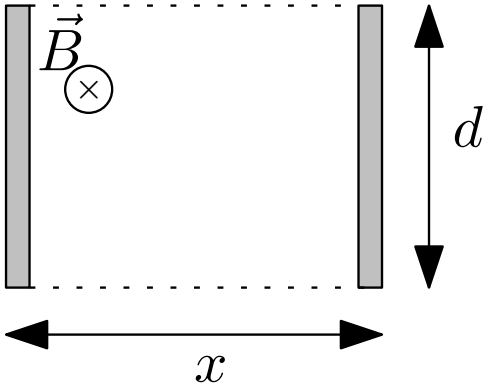
Quando há fluxo constante, a carga na bobina é nula. A partir do momento que não há mais fluxo, haverá carga na bobina, isso ocorre pois oque gera a força eletromotriz é uma variação do fluxo magnético e não o fluxo magnético em si. Por isso, a integração fica:

$$\int_0^Q R.dQ' = -\int_\Phi^0 d\Phi' \Rightarrow R.Q'\Big|_0^Q = -\Phi'\Big|_\Phi^0 \Rightarrow R.Q = \Phi$$

Agora podemos usar o resultado obtido para o fluxo magnético e isolar o campo magnético:

$$R.Q = N.B.S \Rightarrow B = \frac{R.Q}{N.S}$$

9.2 Diferença de potencial entre trilhos de trem



Perceba que a distância d entre os trilhos se mantém constante, porém a distância x paralela aos trilhos será afetada pela presença do trem. Assim, o fluxo poderá ser escrito como:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B.A.cos(0°) = B.d.x$$

Agora podemos calcular a variação do fluxo, que estará associada à uma força eletromotriz induzida que é a diferença de potencial que queremos medir:

$$\varepsilon = \Delta V = -\frac{d\Phi}{dt} = -B.d.\frac{dx}{dt} = -B.d.(-v) = B.d.v$$

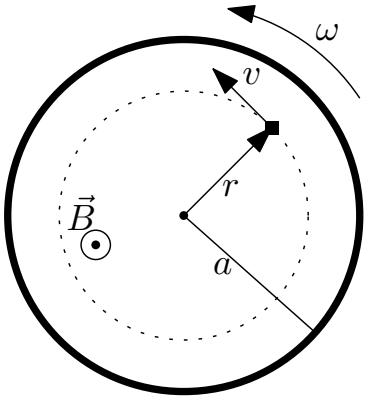
Substituindo os valores dados*, obtemos:

$$\Delta V = 0,5.10^{-4}.1,5.\frac{150}{3,6} = 3,13.10^{-3}\ V = 3,13\ mV$$

Caso nunca tenha visto, procure por "trilho de trem"na *internet*. Isto provavelmente irá lhe elucida.

*Não esqueça das unidades de medida do Sistema Internacional

9.3 Experimento de Michael Faraday



a Diferença de potencial entre o eixo e a periferia

Da definição de força eletromotriz, temos que:

$$\varepsilon = \int \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

Sendo $\vec{f}$ a razão entre a força e a carga. Como nesse caso a força é magnética, teremos o seguinte para a grandeza f:

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}_{mag}}{q} = \frac{q.\vec{v} \times \vec{B}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Pela regra da mão direita, temos que $\hat{v} \times \hat{B} = \hat{r}$. Portanto, a força por unidade de carga $\vec{f}$ é:

$$\vec{f} = v.b\ \hat{r}$$

Perceba que, $d\vec{l}$ é o vetor que liga os pontos aos quais queremos saber a diferença de potencial, por isso vale que $d\vec{r} = d\vec{l}$. Sendo assim, podemos retornar ao cálculo da diferença de potencial:

$$\varepsilon = V = \int v.b\ \hat{r} \cdot d\vec{r} = \int v.b\ dr$$

Não esqueça que estamos em um movimento circular, ou seja, a velocidade v é uma função de r e pode ser escrita como $v = \omega.r$, sendo ω a velocidade angular, esta sim é constante.

$$V = \int \omega.b.r\ dr = \omega.b. \int_0^a r\ dr = \omega.b. \frac{r^2}{2}\bigg|_0^a = \frac{\omega.b.a^2}{2}$$

b Torque gerado pelo surgimento de corrente elétrica

Ao induzirmos uma força eletromotriz, induzimos consequentemente uma corrente elétrica. Esta, por conta da presença do campo magnético, fará surgir uma força que atuará sobre o disco. A força sobre cada pedacinho $d\vec{l}$ é dada por:

$$d\vec{F} = I.(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Como já vimos, $d\vec{l} = d\vec{r}$, e por isso o resultante do produto vetorial é $-B.dl\ \hat{\theta}$:

$$d\vec{F} = -I.B.dl\ \hat{\theta}$$

Perceba que a força que surge tenta frear o disco. Portanto, a força que teremos que exercer sobre o disco para que o mesmo continue girando é o negativo desta calculada.

$$d\vec{F}_{exerc} = -d\vec{F} = I.B.dl\ \hat{\theta}$$

Partindo da definição do torque, podemos determinar o torque exercido necessário para que o disco continue girando:

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F} \Rightarrow d\vec{\tau}_{exerc} = \vec{r} \times d\vec{F}_{exerc}$$

Substituindo a expressão encontrada para a força infinitesimal e integrando, obtemos o valor do torque:

$$\vec{\tau}_{exerc} = \int I.B.(\vec{r} \times \hat{\theta})\ dl = \int I.B.r.(\hat{r} \times \hat{\theta})\ dr$$

Integrando em todo o disco, o resultado é:

$$\vec{\tau}_{exerc} = \int_0^a I.B.r.(\hat{r} \times \hat{\theta})\ dr = I.B.(\hat{r} \times \hat{\theta}).\int_0^a r\ dr = I.B.(\hat{r} \times \hat{\theta}).\frac{r^2}{2}\bigg|_0^a = I.B.\frac{a^2}{2}.(\hat{r} \times \hat{\theta})$$

Pela regra da mão direita, o produto final deverá apontar para fora da página, mas como queremos apenas o módulo, não precisamos nos preocupar com isso:

$$\tau_{exerc} = I.B.\frac{a^2}{2}$$

A potência **f**ornecida pela força $d\vec{F}$ pode ser encontrada a partir de uma relação muito conveniente entre potência, força e velocidade:

$$P_f = \int d\vec{F}_{exerc} \cdot \vec{v}$$

Como $d\vec{F} \parallel \vec{v}$, o produto interno será simplesmente o produto entre os módulos das grandezas. Assim, escrevendo a velocidade linear em função da velocidade angular e integrando nos limites corretos, obtemos:

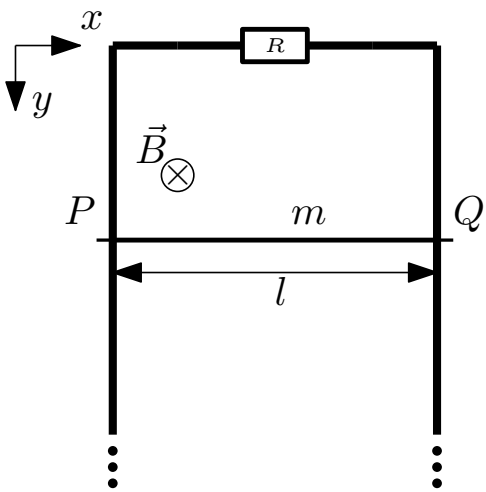
$$P_f = \int dF_{exerc}.v = \int I.B.dl.\omega.r = \omega.I.B.\int_0^a r\ dr = \omega.I.B.\frac{r^2}{2}\bigg|_0^a = \omega.I.B.\frac{a^2}{2}$$

Como vimos nos capítulos anteriores, a potência **d**issipada pode ser encontrada multiplicando a corrente elétrica pela diferença de potencial, oque nos dá:

$$P_d = I.V = I.\frac{\omega.b.a^2}{2}$$

Fica provado então que as potências dissipada e fornecida são iguais.

9.4 Barra metálica deslizando sobre trilhos



a Sentido da corrente induzida

Inicialmente, verifiquemos o fluxo do campo magnético que passa pela espira retangular:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B.A.cos(0°) = B.l.y$$

Derivando, saberemos se o fluxo diminui ou aumenta com o tempo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(B.l.y) = B.l.\frac{dy}{dt} = B.l.v$$

Se o fluxo aumenta com o tempo, a natureza tentará mantê-lo constante, gerando uma corrente elétrica no fio tal que o campo magnético gerado por ela se contraponha ao campo magnético externo, ou seja, saia da página. Portanto, a corrente elétrica induzida estará no sentido anti-horário.

Sabemos que o negativo da variação temporal do fluxo magnético resultará em uma força eletromotriz induzida. Então, a corrente elétrica induzida é:

$$\varepsilon = R.i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B.l.v \Rightarrow i = \frac{-B.l.v}{R}$$

Nos interessa apenas o módulo, ou seja:

$$i = \frac{B.l.v}{R}$$

b Aceleração da barra

Por conta da corrente elétrica induzida, haverá sobre o fio uma força associada à essa grandeza:

$$\vec{F} = i. \int d\vec{l} \times \vec{B}$$

Geralmente orientamos $d\vec{l}$ na mesma direção que a corrente elétrica, portanto o produto vetorial resultará em um vetor orientado para cima, pela regra da mão direita.

$$\vec{F} = i. \int d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{B.l.v}{R}. \int B.(-\hat{y})\ dx = -\frac{B^2.l.v}{R}.\hat{y} \int_0^l\ dx = -\frac{B^2.l.v}{R}.\hat{y}.x\Big|_0^l$$

$$\vec{F} = -\frac{B^2.l^2.v}{R}\ \hat{y}$$

Por conta disso, teremos a força peso puxando a barra para baixo e a força elétrica induzida puxando a barra para cima. Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$F_y = m.a_y \Rightarrow a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{p - F}{m} = \frac{m.g - \frac{B^2.l^2.v}{R}}{m} = g - \frac{B^2.l^2.v}{m.R}$$

c Velocidade terminal da barra

A velocidade terminal é atingida quando a força resultante sobre o corpo é nula, ou seja, quando a aceleração do corpo é zero. Aplicando esta condição, obtemos:

$$a_y = 0 \Rightarrow g - \frac{B^2.l^2.v_0}{m.R} = 0 \Rightarrow g = \frac{B^2.l^2.v_0}{m.R} \Rightarrow B^2.l^2.v_0 = m.g.R \Rightarrow v_0 = \frac{m.g.R}{B^2.l^2}$$

d Corrente elétrica quando a barra atinge a velocidade terminal

Para descobrir o valor da corrente elétrica quando chegamos à velocidade terminal, simplesmente substituímos a velocidade v por v_0 na equação da corrente elétrica induzida:

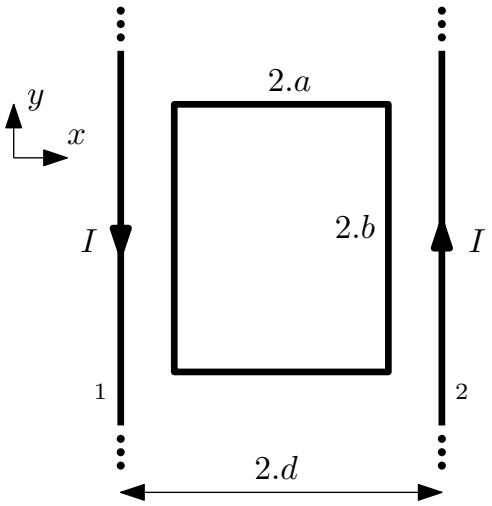
$$i_0 = \frac{B.l.v_0}{R} = \frac{B.l.\frac{m.g.R}{B^2.l^2}}{R} = \frac{m.g}{B.l}$$

e Energia na situação terminal

Como não há variação de energia cinética, inicialmente podemos pensar que a energia potencial gravitacional simplesmente não se converte em nada. O fato é que a energia potencial gravitacional será totalmente convertida em energia térmica, fazendo a barra aumentar de temperatura enquanto cai:

$$\Delta U = \Delta Q = m.g.\Delta h = m.g.\Delta y = m.g.v_0.\Delta t$$

9.5 Espira retangular entre par de fios com corrente elétrica



Pela Lei de Ampère, o campo magnético gerado por cada corrente elétrica I que passa no fio em um ponto que dista x do mesmo é:

$$B = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.x} \text{ ou, vetorialmente, } \vec{B} = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.x}\ \hat{\varphi}$$

Vamos considerar o $x = 0$, ou seja, a origem do eixo de coordenadas, em cima do fio da esquerda. Assim, poderemos calcular o campo magnético em cada ponto do plano que estamos visualizando considerando a superposição dos campos magnéticos:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.x_1}\ \hat{\varphi} - \frac{\mu_0.I}{2.\pi.x_2}\ \hat{\varphi} = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.x}\ \hat{\varphi} + \frac{\mu_0.I}{2.\pi.(2.d - x)}\ \hat{\varphi}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2.d - x}\right]\hat{\varphi}$$

Na região em que estamos trabalhando, perceba que $\hat{\varphi} = \hat{z}$, isso é verdade apenas porquê estamos olhando para o plano, não é algo geral.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2.d - x}\right]\hat{z}$$

Agora podemos calcular o fluxo do campo magnético resultante na espira retangular:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B.(\hat{z} \cdot \hat{z})\ dA = \int B\ dA$$

Perceba que o campo magnético é constante ao longo de y, portanto nossa variável de integração será x, pois é o sentido em que o campo magnético varia.

$$\Phi = \int B.L\ dx = \int \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2.d - x}\right].L\ dx = \int \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2.d - x}\right].2.b\ dx$$

A integração deve ser feita de $d - a$ até $d + a$, que é onde há espira para que haja fluxo magnético. Sendo assim, obtemos:

$$\Phi = \int_{d-a}^{d+a} \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2.d - x}\right].2.b\ dx = \frac{\mu_0.I.b}{\pi}.\int_{d-a}^{d+a}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2.d - x}\right]\ dx$$

A integral da soma é a soma das integrais, por isso:

$$\Phi = \frac{\mu_0.I.b}{\pi}.\left[\int_{d-a}^{d+a}\frac{dx}{x} + \int_{d-a}^{d+a}\frac{dx}{2.d-x}\right]$$

Substituímos o denominador da segunda integral para que possamos integrar. Fazendo $u = 2.d - x$, consequentemente $du = -dx$ e os limites de integração serão também ajustados, quando $x = d+a$, temos $u = d-a$ e quando $x = d-a$, temos $u = d+a$. Logo:

$$\Phi = \frac{\mu_0.I.b}{\pi}.\left[\int_{d-a}^{d+a}\frac{dx}{x} + \int_{d+a}^{d-a}\frac{-du}{u}\right] = \frac{\mu_0.I.b}{\pi}.\left[\int_{d-a}^{d+a}\frac{dx}{x} + \int_{d-a}^{d+a}\frac{du}{u}\right]$$

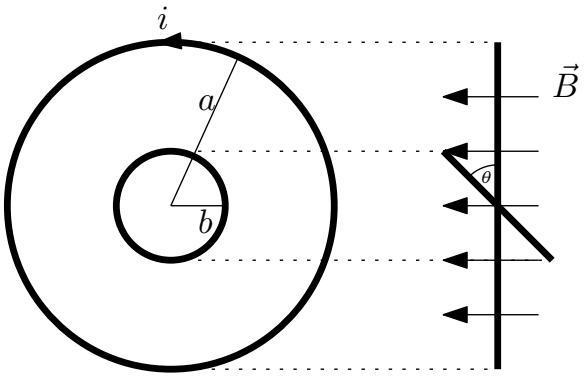
Perceba que temos exatamente a mesma integral duas vezes, oque se altera é a variável, mas as funções e limites são os mesmos. Logo, podemos escrever apenas uma e multiplicar por 2.

$$\Phi = 2.\frac{\mu_0.I.b}{\pi}.\int_{d-a}^{d+a}\frac{dx}{x} = 2.\frac{\mu_0.I.b}{\pi}.ln(x)\Big|_{d-a}^{d+a} = 2.\frac{\mu_0.I.b}{\pi}.ln\left|\frac{d+a}{d-a}\right|$$

Partindo da definição, a indutância mútua será:

$$L = \frac{\Phi}{I} = 2.\frac{\mu_0.b}{\pi}.ln\left|\frac{d+a}{d-a}\right|$$

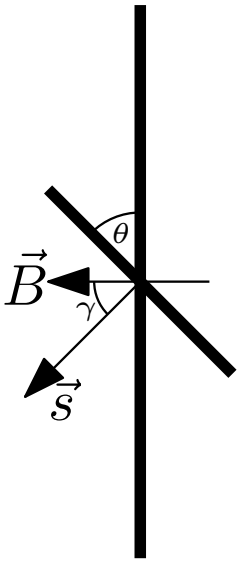
9.6 Indutância mútua de espiras circulares



Lembre que o fluxo é calculado considerando o produto interno. Como o campo magnético interno à espira é aproximadamente constante[a], não precisamos nos preocupar com a integração, já que todas as partes contribuirão igualmente para o fluxo. Porém, teremos que tomar cuidado ao calcular o ângulo entre o campo magnético e o vetor área da espira menor.

[a] Isso só verdade pois estamos na condição em que $b << a$, assim é como se a espira de raio b ocupasse um espaço tão pequeno que não é suficiente para o campo magnético variar.

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{s} = B.s.cos(\gamma) = B.\pi.b^2.cos(\gamma)$$



Pelo triângulo formado, teremos:

$$\gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \theta$$

Logo, podemos afirmar que:

$$\Phi = B.\pi.b^2.cos(\theta)$$

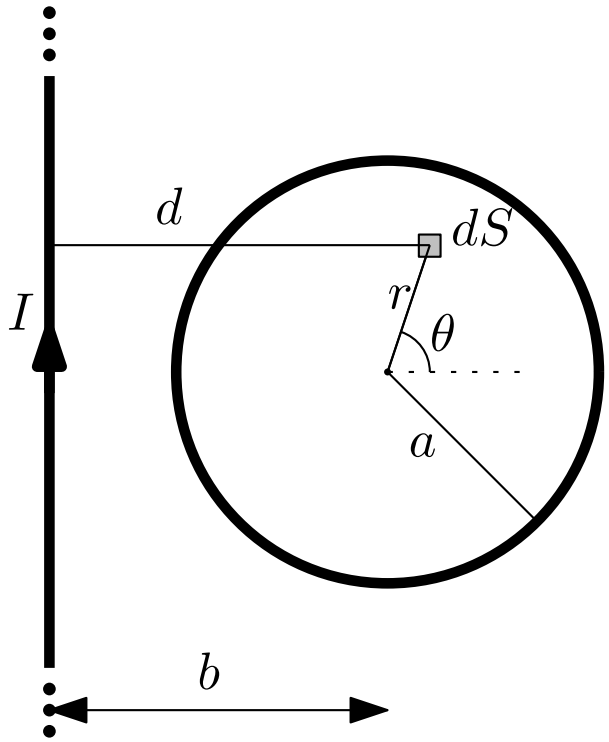
Pela Lei de Biot-Savart, o campo magnético é facilmente calculado no centro da espira de raio a, o valor é:

$$B = \frac{\mu_0.i}{2.a}$$

Portanto, finalmente podemos encontrar a indutância mútua:

$$\Phi = \frac{\mu_0.i}{2.a}.\pi.b^2.cos(\theta) \Rightarrow L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0}{2.a}.\pi.b^2.cos(\theta)$$

9.7 Autoindutância entre espira circular e fio retilíneo



O campo magnético gerado pela corrente elétrica que passa no fio retilíneo é facilmente descoberto pela Lei de Ampère, assim obtemos:

$$B = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.d}$$

Com o sentido sendo para dentro da página, assim definimos o vetor área do círculo como apontando também para dentro, fugindo portanto do sinal negativo. Então vale:

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B \; dS$$

Lembre que cada infinitésimo de área do disco pode ser escrito em função da sua distância ao centro do disco e do ângulo que o vetor fará com a horizontal, ou seja

$$dS = r.dr.d\theta$$

Logo:

$$\Phi = \int\int B.r \; dr d\theta = \int\int \frac{\mu_0.I}{2.\pi.d}.r \; dr d\theta$$

A distância d do ponto ao fio pode ser escrita em função do raio r e do ângulo θ.

$$d = b + r.cos(\theta)$$

Substituindo, obtemos a seguinte integral dupla:

$$\Phi = \int\int \frac{\mu_0.I}{2.\pi.[b + r.cos(\theta)]}.r \; dr d\theta$$

A integração deve ser feita tanto em r quanto em θ, por isso é dupla. Sendo de 0 até a em r e de 0 até $2.\pi$ em θ.

$$\Phi = \int_0^a \int_0^{2.\pi} \frac{\mu_0.I}{2.\pi.[b + r.cos(\theta)]}.r \; d\theta \; dr = \frac{\mu_0.I}{2.\pi}. \int_0^a r. \int_0^{2.\pi} \frac{1}{b + r.cos(\theta)} \; d\theta \; dr$$

Vamos resolver primeiramente a integral em θ. Lembremos que:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$cos^2(x) - sen^2(x) = cos(2.x)$$

Faremos $x = \frac{\theta}{2}$, e colocaremos $sen^2(x) + cos^2(x)$ multiplicando b e substituiremos o $cos(\theta)$ por $cos^2(x) - sen^2(x)$. Obtemos assim:

$$\Theta = \int_0^{2.\pi} \frac{1}{b.[sen^2(\frac{\theta}{2}) + cos^2(\frac{\theta}{2})] + r.[cos^2(\frac{\theta}{2}) - sen^2(\frac{\theta}{2})]}\ d\theta$$

$$\Theta = \int_0^{2.\pi} \frac{1}{b.sen^2(\frac{\theta}{2}) + b.cos^2(\frac{\theta}{2}) + r.cos^2(\frac{\theta}{2}) - r.sen^2(\frac{\theta}{2})}\ d\theta$$

$$\Theta = \int_0^{2.\pi} \frac{1}{[b-r].sen^2(\frac{\theta}{2}) + [b+r].cos^2(\frac{\theta}{2})}\ d\theta = \int_0^{2.\pi} \frac{1}{[b+r].cos^2(\frac{\theta}{2}).\left[\frac{[b-r].sen^2(\frac{\theta}{2})}{[b+r].cos^2(\frac{\theta}{2})} + 1\right]}\ d\theta$$

$$\Theta = \int_0^{2.\pi} \frac{sec^2(\frac{\theta}{2})}{[b+r].\left[\frac{b-r}{b+r}.tg^2(\frac{\theta}{2}) + 1\right]}\ d\theta$$

Teremos que fazer uma substituição trigonométrica, faremos $\gamma = \sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.tg(\frac{\theta}{2})$, ou seja, $d\gamma = \sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.\frac{1}{2}.sec^2(\frac{\theta}{2}).d\theta$. Os limites de integração mudarão também, chamemos de γ_1 e γ_2 os limites inferior e superior, respectivamente. Substituindo, obtemos:

$$\Theta = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{sec^2(\frac{\theta}{2})}{[b+r].[\gamma^2+1]}.\frac{d\gamma}{\sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.\frac{1}{2}.sec^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{2}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{\gamma^2+1}$$

O problema ainda não acabou, agora temos que calcular essa integral. Faremos novamente uma substituição trigonométrica, não há para onde fugir. Faremos $\gamma = tg(\nu)$, consequentemente $d\gamma = sec^2(\nu).d\nu$. Vamos esquecer os limites de integração por enquanto, se não iremos carregar muitas notações.

$$\Theta = \int \frac{sec^2(\nu)}{tg^2(\nu)+1}\ d\nu = \int \frac{sec^2(\nu)}{sec^2(\nu)}\ d\nu = \int d\nu = \nu$$

Como $\gamma = tg(\nu)$, o valor obtido pode ser escrito em função do arco tangente da nossa variável anterior:

$$\Theta = arctg(\gamma)$$

Agora sim podemos voltar com os limites de integração:

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{d\gamma}{\gamma^2+1} = \frac{2}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.arctg(\gamma)\Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}$$

Ficará mais simples se voltarmos à variável θ inicial, fazendo isso também mudamos os limites de integração:

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.arctg\left(\sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\Big|_0^{2.\pi}$$

Não podemos aplicar estes limites diretamente, pois a função tangente é descontínua. Uma boa alternativa é dividir pela metade o caminho de integração e multiplicar o resultado por 2:

$$\Theta = \frac{2}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.2.arctg\left(\sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$\Theta = \frac{4}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.\left[arctg\left(\sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.tg\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - arctg\left(\sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.tg\left(\frac{0}{2}\right)\right)\right]$$

$$\Theta = \frac{4}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.\left[arctg\left(\sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.\infty\right) - arctg\left(\sqrt{\frac{b-r}{b+r}}.0\right)\right]$$

$$\Theta = \frac{4}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.\left[arctg(\infty) - arctg(0)\right] = \frac{4}{\sqrt{(b-r).(b+r)}}.\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$\Theta = \frac{2.\pi}{\sqrt{(b-r).(b+r)}} = \frac{2.\pi}{\sqrt{b^2-r^2}}$$

Finalmente obtivemos a solução para θ. Agora podemos voltar à integral inicial e integrar no raio r.

$$\Phi = \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\int_0^a r.\Theta.\ dr = \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\int_0^a r.\frac{2.\pi}{\sqrt{b^2-r^2}}.\ dr$$

Essa integral é bem mais simples que a anterior, bastar fazermos uma substituição simples no denominador. Faremos $b^2 - r^2 = \tau$, logo $d\tau = -2.r.dr$. Os limites de integração se alterarão também:

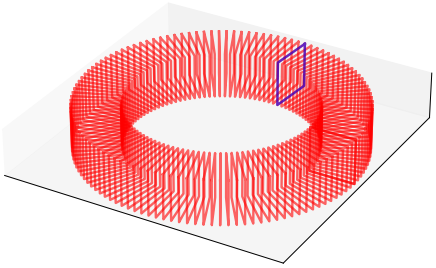
$$\Phi = \frac{\mu_0.I}{2.\pi}.\int_{b^2}^{b^2-a^2} r.\frac{2.\pi}{\sqrt{\tau}}.\ \frac{-d\tau}{2.r} = \frac{-\mu_0.I}{2}.\int_{b^2}^{b^2-a^2}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{-\mu_0.I}{2}.\int_{b^2}^{b^2-a^2}\tau^{\frac{-1}{2}}\ d\tau$$

$$\Phi = \frac{-\mu_0.I}{2}.\frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{b^2}^{b^2-a^2} = -\mu_0.I.[\sqrt{b^2-a^2} - \sqrt{b^2}] = \mu_0.I.[b - \sqrt{b^2-a^2}]$$

Partindo da definição de indução mútua, finalmente obtemos:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0.[b - \sqrt{b^2-a^2}] = \mu_0.b.\left[1 - \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right] = \mu_0.b.\left[1 - \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}\right]$$

9.8 Autoindutância de uma bobina toroidal quadrada



Sabemos que o campo magnético dentro do toroide é dado por:

$$\vec{B} = \mu_0.n.i.\frac{R}{r}\ \hat{\theta}$$

Não sabemos o número de espiras por unidade de comprimento, mas sabemos o número total. Por isso, faremos essa mudança:

$$N = n.c = n.2.\pi.R \Rightarrow n.R = \frac{N}{2.\pi}$$

Substituindo na equação do campo magnético:

$$\vec{B} = \mu_0.N.i.\frac{1}{2.\pi.r}\ \hat{\theta} = \frac{\mu_0.N.i}{2.\pi.r}\ \hat{\theta}$$

Agora verificamos o fluxo magnético gerado por esse campo magnético na própria bobina:

$$\Phi = \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int B.dS.cos(0°) = \int B\ dS$$

Perceba que só há variação de campo magnético ao longo do raio, não ao longo da altura. Por isso, nossa variável de integração será r:

$$\Phi = \int \frac{\mu_0.N.i}{2.\pi.r}\ N.L.dr = \frac{\mu_0.N^2.i}{2.\pi}.L.\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0.N^2.i.L}{2.\pi}.ln(r)\Big|_a^b = \frac{\mu_0.N^2.i.L}{2.\pi}.[ln(b) - ln(a)]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0.N^2.i.L}{2.\pi}.ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Podemos expressar isto em função do raio médio da bobina, ele é definido como:

$$R = \frac{a+b}{2}$$

Mas pela figura temos uma outra informação:

$$b - a = L$$

Então podemos descobrir a e b em função de R e L. Resolvendo o sistema, obtemos:

$$a = \frac{2.R - L}{2}$$

$$b = \frac{2.R + L}{2}$$

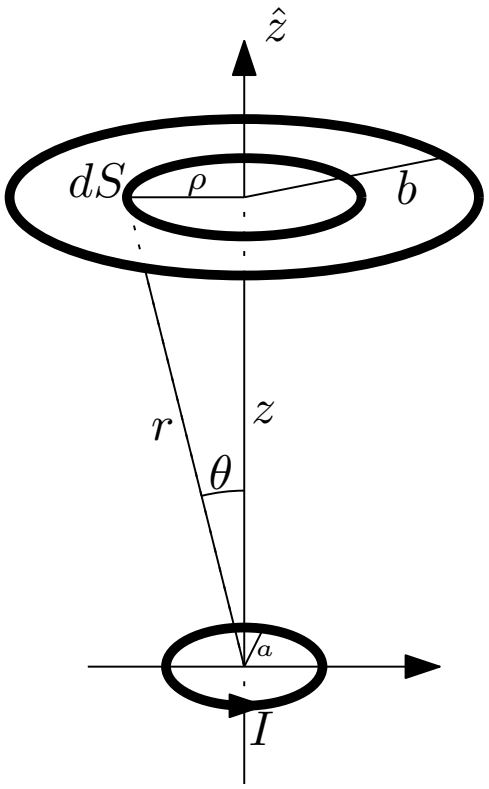
Substituindo no fluxo, teremos:

$$\Phi = \frac{\mu_0.N^2.i.L}{2.\pi}.ln\left(\frac{2.R + L}{2.R - L}\right)$$

Portanto, a autoindutância é dada por:

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0.N^2.L}{2.\pi}.ln\left(\frac{2.R + L}{2.R - L}\right)$$

9.9 Espira circular deslizando rumo a outra



A espira de raio a terá um momento de dipolo magnético associado à corrente que passa por ela:

$$\vec{m} = I.\pi.a^2\ \hat{z}$$

O campo magnético gerado por este dipolo terá a forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\left[\frac{3.\vec{m}\cdot\hat{r}}{r^3}\ \hat{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

Da figura, temos que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\left[\frac{3.m.cos(\theta)}{r^3}\ \hat{r} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

Perceba que o vetor $\vec{r}$ tem duas componentes, sendo uma paralela e outra perpendicular à espira com raio b. Como o fluxo magnético é definido com o produto escalar, a componente perpendicular não influenciará em nada, então podemos considerar apenas a componente z do campo gerado pelo dipolo magnético.

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\left[\frac{3.m.cos(\theta)}{r^3}\ cos(\theta).\hat{z} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\left[\frac{3.m.cos^2(\theta)}{r^3}\ \hat{z} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4.\pi}.\left[\frac{3.m.cos^2(\theta)}{r^3}\ \hat{z} - \frac{m.\hat{z}}{r^3}\right]$$

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0.m}{4.\pi}.\left[\frac{3.cos^2(\theta)}{r^3} - \frac{1}{r^3}\right]\ \hat{z}$$

Agora podemos calcular o fluxo magnético sobre espira circular grande:

$$\Phi = \oint \vec{B}_z \cdot d\vec{S} = \int B_z.dS.cos(0^\circ) = \int B_z\ dS$$

Perceba que o campo magnético varia basicamente com r, se o mantemos constante, o campo magnético é constante, pois o θ também será constante. Por isso, a área infinitesimal de integração serão anéis de raio ρ:

$$dS = 2.\pi.\rho.d\rho$$

Substituindo na integral:

$$\Phi = \int B_z.2.\pi.\rho\ d\rho = \int \frac{\mu_0.m}{4.\pi}.\left[\frac{3.cos^2(\theta)}{r^3} - \frac{1}{r^3}\right].2.\pi.\rho\ d\rho = \frac{\mu_0.m}{2}.\int \left[\frac{3.cos^2(\theta)}{r^3} - \frac{1}{r^3}\right].\rho\ d\rho$$

Por Pitágoras, podemos afirmar que:

$$r^2 = z^2 + \rho^2 \Rightarrow r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$$

Pela Trigonometria, no triângulo formado, obtemos:

$$cos(\theta) = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \Rightarrow cos^2(\theta) = \frac{z^2}{z^2 + \rho^2}$$

Substituindo, temos:

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\int \left[\frac{3.\frac{z^2}{z^2+\rho^2}}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right].\rho\ d\rho = \frac{\mu_0.m}{2}.\int \left[\frac{3.z^2}{(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right].\rho\ d\rho$$

Queremos a contribuição em toda a espira circular de raio b, logo devemos integrar até este limite.

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\int_0^b \left[\frac{3.z^2}{(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\right].\rho\ d\rho = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\int_0^b \frac{3.z^2.\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\ d\rho - \int_0^b \frac{\rho}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\ d\rho\right]$$

Já vimos incansavelmente este tipo de integral, sua resolução se dá por meio de uma substituição simples. Consideremos $u = z^2 + \rho^2$, ou seja, $du = 2.\rho\ d\rho$. Não esqueça de atualizar os limites de integração:

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\int_{z^2}^{z^2+b^2} \frac{3.z^2.\rho}{u^{\frac{5}{2}}}\ \frac{du}{2.\rho} - \int_{z^2}^{z^2+b^2} \frac{\rho}{u^{\frac{3}{2}}}\ \frac{du}{2.\rho}\right] = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{3.z^2}{2}.\int_{z^2}^{z^2+b^2} \frac{1}{u^{\frac{5}{2}}}\ du - \frac{1}{2}.\int_{z^2}^{z^2+b^2} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\ du\right]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{3.z^2}{2}.\int_{z^2}^{z^2+b^2} u^{\frac{-5}{2}}\ du - \frac{1}{2}.\int_{z^2}^{z^2+b^2} u^{\frac{-3}{2}}\ du\right]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{3.z^2}{2}.\left(-\frac{2}{3}\right).u^{\frac{-3}{2}}\Big|_{z^2}^{z^2+b^2} - \frac{1}{2}.\left(-\frac{2}{1}\right).u^{\frac{-1}{2}}\Big|_{z^2}^{z^2+b^2}\right] = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[-z^2.\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\Big|_{z^2}^{z^2+b^2} + \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\Big|_{z^2}^{z^2+b^2}\right]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[-z^2.\left(\frac{1}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(\frac{1}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\left(-\frac{z^2}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^2}{(z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(\frac{1}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(z^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[-\frac{z^2}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{z} + \frac{1}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{z}\right] \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{1}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z^2}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Lembre que ainda estamos calculando o fluxo magnético, depois teremos que derivar o mesmo com relação ao tempo. Por isso, tentaremos simplificar a expressão obtida, assim facilitando a derivação:

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}} - z^2.(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}} - z^2.(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{(z^2+b^2)^{\frac{1}{2}}.(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right].\frac{(z^2+b^2)^{\frac{-1}{2}}}{(z^2+b^2)^{\frac{-1}{2}}}$$

Assim, obtemos:

$$\Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{z^2+b^2-z^2}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{b^2}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

A variação temporal do fluxo magnético resulta em uma força eletromotriz induzida, e esta está diretamente relacionada com a corrente induzida que queremos:

$$\varepsilon = R.i = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow i = -\frac{1}{R}.\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}.\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0.m}{2}.\left[\frac{b^2}{(z^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\right) = \frac{-\mu_0.m.b^2}{2.R}.\frac{d}{dt}[(z^2+b^2)^{\frac{-3}{2}}]$$

Pela derivada das funções compostas, temos:

$$i = \frac{-\mu_0.m.b^2}{2.R}.\left(\frac{-3}{2}\right).(z^2+b^2)^{\frac{-5}{2}}.2.z.\frac{d}{dt}z$$

Perceba que a variação temporal da distância z é exatamente a velocidade da espira de raio a. Assim, finalmente obtemos a corrente elétrica induzida na espira de raio b:

$$i = \frac{\mu_0.m.b^2}{2.R}.(3).(z^2+b^2)^{\frac{-5}{2}}.z.v = \frac{\mu_0.I.\pi.a^2.b^2}{2.R}.(3).(z^2+b^2)^{\frac{-5}{2}}.z.v$$

Apenas reorganizando os termos:

$$i = \frac{3}{2}.\frac{\mu_0.\pi.a^2.b^2.v.I}{(z^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}.z$$

Como a aproximação da espira de raio a faz aumentar o fluxo magnético na espira de raio b, a corrente induzida deve diminuir este fluxo. Por isso, as correntes elétricas são opostas!

9.10 Indutância de bobinas ligadas em série

A queda de potencial ao passar por uma bobina será dada pela parcela de autoindutância e de indutância mútua, de tal forma que quando temos apenas uma bobina, a parcela de indutância mútua é zero. O ponto importante é que a parcela de indutância mútua, associada ao fluxo que uma bobina gera na outra, pode contribuir tanto positivamente (no mesmo sentido fluxo associado à autoindutância) quanto negativamente (no sentido oposto ao fluxo associado à autoindutância). Sendo assim, a queda de potencial ao passar por cada bobina é:

$$V_1 = L_1.\frac{di}{dt} \pm L_{12}.\frac{di}{dt}$$

$$V_2 = L_2.\frac{di}{dt} \pm L_{21}.\frac{di}{dt} = L_2.\frac{di}{dt} \pm L_{12}.\frac{di}{dt}$$

Como estão em série, a soma das quedas de potencial deve dar a diferença de potencial total:

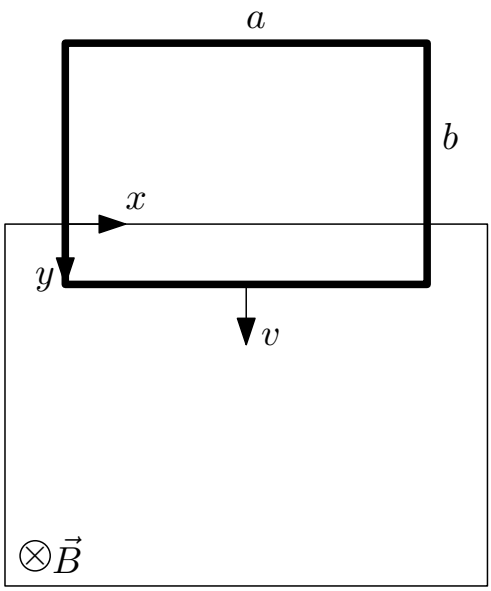
$$V = V_1 + V_2 = L_1.\frac{di}{dt} \pm L_{12}.\frac{di}{dt} + L_2.\frac{di}{dt} \pm L_{12}.\frac{di}{dt} = \left[L_1 + L_2 \pm 2.L_{12}\right].\frac{di}{dt}$$

Sendo assim, teremos uma indutância equivalente sendo dada por:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2.L_{12}$$

9.11 Espira retangular caindo em plano perpendicular a campo magnético

a Força sobre a espira entrando no campo magnético



Para que possamos calcular a força, precisaremos inicialmente saber a corrente induzida na espira. O fluxo magnético é dado por:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S.cos(0°) = B.S = B.a.y$$

O negativo da variação do fluxo no tempo dá a força eletromotriz induzida, e com ela encontramos a corrente elétrica induzida que queremos:

$$\varepsilon = R.I = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow I = \frac{-1}{R}.\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-1}{R}.\frac{d(B.a.y)}{dt}$$

$$I = \frac{-B.a}{R}.\frac{d(y)}{dt} = \frac{-B.a.v}{R}$$

O sinal negativo nos diz que a corrente elétrica induzida circula a espira no sentido anti-horário.

Agora poderemos calcular a força que surge sobre a espira. No geral, podemos escrever:

$$\vec{F} = I.\oint d\vec{l} \times \vec{B}$$

Pela Regra da mão direita, perceba que a força que atua nos fios verticais da espira se anularão. Pela mesma Regra, a força resultante sobre o fio horizontal aponta para cima:

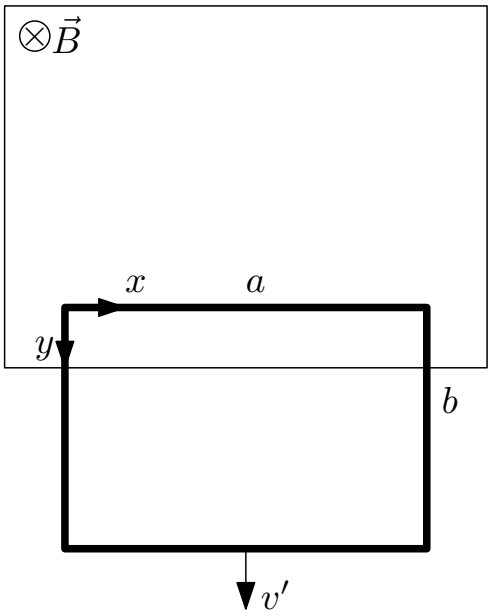
$$\vec{F} = I.(-\hat{y}) \int_0^a |d\vec{l} \times \vec{B}|$$

Lembre, o que nos interessa é apenas o módulo da corrente elétrica:

$$\vec{F} = \frac{-B.a.v}{R}.\hat{y}.int_0^a B.dl = \frac{-B.a.v.B}{R}.\hat{y}.\int_0^a dl = -\frac{B^2.a^2.v}{R}\ \hat{y}$$

$$\vec{F} = -\frac{B^2.a^2}{R}.\vec{v}$$

b Força sobre a espira saindo do campo magnético



O fluxo de campo magnético continua o mesmo:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S.cos(0°) = B.S = B.a.y$$

O negativo da variação do fluxo no tempo dá a força eletromotriz induzida, e com ela encontramos a corrente elétrica induzida que queremos. Dessa vez, teremos:

$$\varepsilon = R.I = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow I = \frac{-1}{R}.\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-1}{R}.\frac{d(B.a.y)}{dt}$$

$$I = \frac{-B.a}{R}.\frac{d(y)}{dt} = \frac{B.a.v'}{R}$$

O sinal positivo nos diz que a corrente elétrica induzida circula a espira no sentido horário.

Agora poderemos calcular a força que surge sobre a espira. No geral, podemos escrever:

$$\vec{F} = I.\oint d\vec{l} \times \vec{B}$$

Pela Regra da mão direita, perceba que a força que atua nos fios verticais da espira se anularão. Pela mesma Regra, a força resultante sobre o fio horizontal aponta para cima:

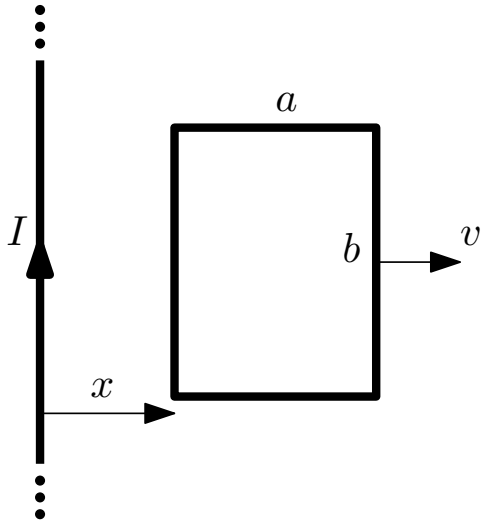
$$\vec{F} = I.(-\hat{y}) \int_0^a |d\vec{l} \times \vec{B}|$$

Assim, obtemos:

$$\vec{F} = \frac{-B.a.v'}{R}.\hat{y}.int_0^a B.dl = \frac{-B.a.v'.B}{R}.\hat{y}.\int_0^a dl = -\frac{B^2.a^2.v'}{R}\ \hat{y}$$

$$\vec{F} = -\frac{B^2.a^2}{R}.\vec{v'}$$

9.12 Espira retangular se afastando de fio retilíneo



a Fluxo sobre a espira

Sabemos dos capítulos anteriores que o campo magnético gerado pela corrente elétrica no fio é:

$$B = \frac{\mu_0.I}{2.\pi.x}$$

Na região em que estamos estudando, o campo aponta para dentro da página.
Agora podemos calcular o fluxo magnético:

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B.dS.cos(0^\circ) = \int B\ dS$$

Perceba que o campo magnético varia com x, ou seja, para uma mesma posição y o campo magnético não varia. Então nossa variável de integração será x, e integraremos de x até $x + a$ (região em que há espira). Para não causar confusão com os limites de integração, a variável de integração será l:

$$\Phi = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0.I}{2.\pi.l}\ b.dl = \frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.\int_x^{x+a} \frac{1}{l}\ dl = \frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.ln(l)\Big|_x^{x+a} = \frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.[ln(x+a) - ln(x)]$$

$$\Phi = \frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.ln\left(\frac{x+a}{x}\right)$$

b Corrente elétrica induzida na espira

Precisaremos derivar o fluxo magnético com relação ao tempo, seu negativo será a força eletromotriz induzida:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.ln\left(\frac{x+a}{x}\right)\right] = -\frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.\frac{d}{dt}\left[ln\left(\frac{x+a}{x}\right)\right]$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.\frac{x}{x+a}.\frac{d}{dt}\left[\frac{x+a}{x}\right]$$

Usando a Regra do Quociente, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x+a}{x}\right] = \frac{\frac{dx}{dt}.x - \frac{dx}{dt}.(x+a)}{x^2} = -\frac{v.a}{x^2}$$

Substituindo na equação da força eletromotriz:

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0.I.b}{2.\pi}.\frac{x}{x+a}\left(-\frac{v.a}{x^2}\right) = \frac{\mu_0.I.v.a.b}{2.\pi.(x+a).x}$$

Como $x = v.t$, obtemos o seguinte:

$$\varepsilon = \frac{\mu_0.I.\frac{x}{t}.a.b}{2.\pi.(v.t+a).x} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\mu_0.I.a.b}{2.\pi.t(v.t+a)}$$

Assim, concluímos que a corrente elétrica induzida é:

$$\varepsilon = R.I = \frac{\mu_0.I.a.b}{2.\pi.t(v.t+a)} \Rightarrow I = \frac{\mu_0.I.a.b}{2.\pi.R.t(v.t+a)}$$

O sinal positivo indica que a corrente elétrica circulará a espira no sentido horário.

CAPÍTULO

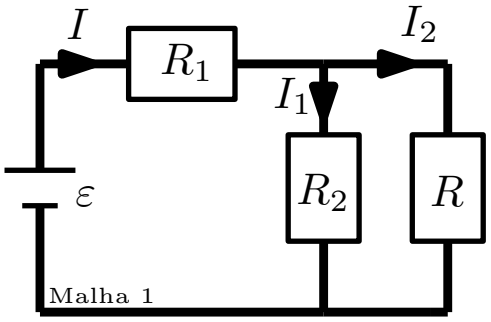
10

CIRCUITOS

"O primeiro gole da natureza filosófica é o que mais embriaga; é nele que o jovem pensador acredita ter descoberto a verdadeira essência do mundo."

Friedrich Nietzsche

10.1 Circuito resistivo



Perceba que R_2 e R estão em paralelo, a resistência equivalente dessa associação é:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R} = \frac{R + R_2}{R.R_2} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_2.R}{R + R_2}$$

Este novo resistor está em série com o resistor R_1. A resistência equivalente total é, portanto:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2.R}{R + R_2}$$

Pela Primeira Lei de Ohm, podemos determinar a corrente elétrica I do circuito, pois sabemos a resistência equivalente total:

$$\Delta V = R_{eq}.I \Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}}$$

Pela Lei dos Nós, sabemos que $I = I_1 + I_2$, e pela Lei das Malhas, sendo aplicada na Malha 1, temos:

$$-\varepsilon + R_1.I + R_2.I_1 = 0 \Rightarrow R_2.I_1 = \varepsilon - R_1.I = \varepsilon - R_1.\frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{R_2}.\left[\varepsilon - R_1.\frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}}\right]$$

$$I_1 = \frac{1}{R_2}.\left[\frac{\varepsilon.\left(R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}\right) - R_1.\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}}\right] = \varepsilon.\frac{\frac{R}{R+R_2}}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}}$$

Com a equação obtida da Lei dos Nós, podemos obter a corrente elétrica I_2, é ela que nos interessa para o calculo da potência dissipada em R:

$$I_2 = I - I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}} - \varepsilon.\frac{\frac{R}{R+R_2}}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}} = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}}.\left[1 - \frac{R}{R + R_2}\right] = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}}.\left[\frac{R + R_2 - R}{R + R_2}\right]$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1 + \frac{R_2.R}{R+R_2}}.\frac{R_2}{R + R_2} = \frac{\varepsilon.R_2}{(R + R_2).R_1 + R_2.R}$$

Agora podemos calcular a potência dissipada no resistor R:

$$P = I_2^2.R = \left[\frac{\varepsilon.R_2}{(R + R_2).R_1 + R_2.R}\right]^2.R = \frac{\varepsilon^2.R_2^2.R}{[(R + R_2).R_1 + R_2.R]^2}$$

Queremos saber quanto vale R para que P seja afetada ao mínimo pelas variações de R. Então derivaremos P com relação à R e igualamos à zero:

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dR}\left[\frac{\varepsilon^2.R_2^2.R}{[(R+R_2).R_1 + R_2.R]^2}\right] = 0$$

Usando as regras de derivação corretamente, obtemos:

$$\frac{\varepsilon^2.R_2^2.[(R+R_2).R_1 + R_2.R]^2 - \varepsilon^2.R_2^2.R.2.[(R+R_2).R_1 + R_2.R].[R_1+R_2]}{[(R+R_2).R_1 + R_2.R]^4} = 0$$

Agora precisamos isolar R:

$$\varepsilon^2.R_2^2.[(R+R_2).R_1 + R_2.R]^2 - \varepsilon^2.R_2^2.R.2.[(R+R_2).R_1 + R_2.R].[R_1+R_2] = 0$$

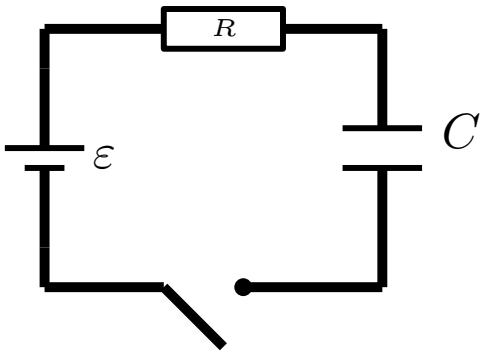
$$[(R+R_2).R_1 + R_2.R] - R.2.[R_1+R_2] = 0 \Rightarrow R.R_1 + R_2.R_1 + R_2.R - R.2.R_1 - R.2.R_2 = 0$$

$$R_2.R_1 - R.R_1 - R.R_2 = 0 \Rightarrow R = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}$$

Substituindo os valores, finalmente chegamos em:

$$R = \frac{20.60}{20+60} = 15\ \Omega$$

10.2 Circuito RC após um longo tempo



Sabemos que a corrente elétrica em função do tempo é:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}$$

E a carga armazenada em cada placa do capacitor é:

$$Q(t) = \varepsilon.C(1 - e^{-\frac{t}{R.C}})$$

Partindo de $P = I.\Delta V$, podemos calcular a potência fornecida pela fonte de força eletromotriz, a potência dissipada pelo resistor e a potência armazenada pelo capacitor. São elas, respectivamente:

$$P_\varepsilon = I.\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}$$

$$P_R = I^2.R = \left[\frac{\varepsilon}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}\right]^2.R = \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{-\frac{2.t}{R.C}}$$

$$P_C = I.\frac{Q}{C} = \frac{1}{C}.\left[\frac{\varepsilon}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}\right].\left[\varepsilon.C(1 - e^{-\frac{t}{R.C}})\right] = \frac{\varepsilon^2}{R}.(e^{-\frac{t}{R.C}} - e^{-\frac{2.t}{R.C}})$$

Lembre que podemos expressar a potência em função da energia pelo tempo, assim teremos:

$$P = \frac{dU}{dt} \Rightarrow dU = P.dt \Rightarrow \Delta U = \int_0^\infty P\ dt$$

Veja que todas as potências tem dependência temporal do tipo $e^{-\alpha.t}$, esta integral é resolvida por uma substituição simples, e resulta em $\frac{-1}{\alpha}.e^{-\alpha.t}$.

Assim, poderemos calcular as energia associadas à cada potência:

$$\Delta U_\varepsilon = \int_0^\infty P_\varepsilon\ dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}\ dt = -\varepsilon^2.C.e^{-\frac{t}{R.C}}\Big|_0^\infty = -\varepsilon^2.C.(0-1) = \varepsilon^2.C$$

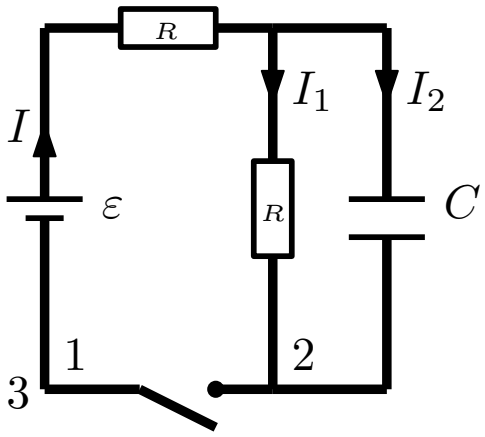
$$\Delta U_R = \int_0^\infty P_R\ dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{-\frac{2.t}{R.C}}\ dt = \frac{-\varepsilon^2.C}{2}.e^{-\frac{2.t}{R.C}}\Big|_0^\infty = \frac{-\varepsilon^2.C}{2}.(0-1) = \frac{\varepsilon^2.C}{2}$$

$$\Delta U_C = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}.(e^{-\frac{t}{R.C}} - e^{-\frac{2.t}{R.C}})\ dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}}\ dt - \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{-\frac{2.t}{R.C}}\ dt = \Delta U_\varepsilon - \Delta U_R = \frac{\varepsilon^2.C}{2}$$

Perceba que, de fato, após um tempo muito grande (tendendo ao infinito), as energias se equilibram:

$$\Delta U_R = \Delta U_C = \frac{\Delta U_\varepsilon}{2}$$

10.3 Diferença de potencial no capacitor após a chave ser ligada



Como a capacitância é definida com base na diferença de potencial, podemos descobrir a diferença de potencial partindo disso:

$$C = \frac{Q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Como a capacitância C é constante, teremos que determinar apenas quem é $Q(t)$.

Aplicando a Lei das Malhas para as malhas 1, 2 e 3 do circuito, obtemos, respectivamente:

$$-\varepsilon + R.I + R.I_1 = 0$$

$$\frac{Q_2}{C} - R.I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{Q_2}{R.C}$$

$$-\varepsilon + R.I + \frac{Q_2}{C} = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{Q_2}{R.C}$$

Já pela Lei dos Nós, é claro que $I = I_1 + I_2$. Como a corrente elétrica 2 é a variação temporal da carga nas placas do capacitor, podemos obter uma Equação Diferencial Ordinária para Q_2.

Usando a equação obtida com a Lei dos Nós, e substituindo os valores das correntes elétrica obtidas com a Lei das Malhas:

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - \frac{Q_2}{R.C} = \frac{Q_2}{R.C} + \frac{dQ_2}{dt} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{R} - \frac{2.Q_2}{R.C} = \frac{dQ_2}{dt}$$

$$\frac{\varepsilon.R.C - 2.Q_2.R}{R^2.C} = \frac{dQ_2}{dt} \Rightarrow \frac{dQ_2}{\varepsilon.R.C - 2.Q_2.R} = \frac{dt}{R^2.C}$$

Sabemos que inicialmente ($t = 0\ s$) o capacitor está descarregado ($Q_2 = 0\ C$). Integrando, obtemos:

$$\int_0^Q \frac{dQ_2}{\varepsilon.R.C - 2.Q_2.R} = \int_0^t \frac{dt'}{R^2.C}$$

Com uma substituição simples resolvemos o problema: fazemos $u = \varepsilon.R.C - 2.Q_2.R$, e consequentemente $du = -2.R.dQ_2$. Lembre-se que os limites de integração deverão mudar também:

$$\int_{\varepsilon.R.C}^{\varepsilon.R.C-2.Q.R} \frac{-1}{2.R}.\frac{du}{u} = \int_0^t \frac{dt'}{R^2.C} \Rightarrow \int_{\varepsilon.R.C}^{\varepsilon.R.C-2.Q.R} \frac{du}{u} = -2.\int_0^t \frac{dt'}{R.C}$$

$$ln(u)\Big|_{\varepsilon.R.C}^{\varepsilon.R.C-2.Q.R} = -2.\frac{t'}{R.C}\Big|_0^t \Rightarrow ln(\varepsilon.R.C - 2.Q.R) - ln(\varepsilon.R.C) = -2.\frac{t}{R.C} + 2.\frac{0}{R.C}$$

Podemos, partindo daqui, isolar a carga Q do capacitor em um tempo arbitrário t:

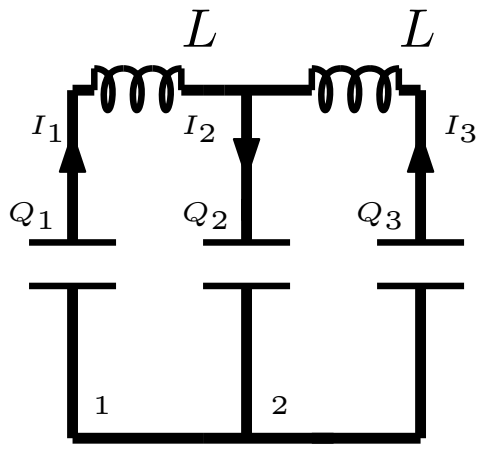
$$ln\left(\frac{\varepsilon.R.C - 2.Q.R}{\varepsilon.R.C}\right) = -2.\frac{t}{R.C} \Rightarrow \frac{\varepsilon.R.C - 2.Q.R}{\varepsilon.R.C} = e^{-2.\frac{t}{R.C}}$$

$$\varepsilon.R.C - 2.Q.R = \varepsilon.R.C.e^{-2.\frac{t}{R.C}} \Rightarrow Q = \frac{\varepsilon.R.C - \varepsilon.R.C.e^{-2.\frac{t}{R.C}}}{2.R}$$

Finalmente podemos voltar ao problema inicial e calcular a diferença de potencial nos terminais :

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\varepsilon.R.C - \varepsilon.R.C.e^{-2.\frac{t}{R.C}}}{2.R.C} = \frac{\varepsilon - \varepsilon.e^{-2.\frac{t}{R.C}}}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.\left[1 - e^{-2.\frac{t}{R.C}}\right]$$

10.4 Frequências de oscilação em circuito LC



Para resolver esse problema, a primeira coisa que devemos fazer é imaginar que há uma corrente elétrica correndo no circuito. O importante é obedecer a corrente elétrica que nós mesmos impomos, seja qual for ela. Aplicando a Lei das Malhas para as malhas 1 e 2, obtemos, respectivamente:

$$\frac{Q_1}{C} + L.\frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_2}{C} = 0$$

$$-\frac{Q_3}{C} - \frac{Q_2}{C} - L.\frac{dI_3}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{Q_3}{C} + \frac{Q_2}{C} + L.\frac{dI_3}{dt} = 0$$

Lembre que a corrente elétrica é a derivada temporal das cargas nas placas de cada capacitor, então derivamos com relação ao tempo de ambos os lados das equações:

$$\frac{I_1}{C} + L.\frac{d^2I_1}{dt^2} + \frac{I_2}{C} = 0$$

$$\frac{I_3}{C} + \frac{I_2}{C} + L.\frac{d^2I_3}{dt^2} = 0$$

Pela Lei dos Nós, sabemos que $I_2 = I_3 + I_1$. Podemos então expressar as equações como:

$$L.\frac{d^2I_1}{dt^2} + 2.\frac{I_1}{C} + \frac{I_3}{C} = 0$$

$$L.\frac{d^2I_3}{dt^2} + 2.\frac{I_3}{C} + \frac{I_1}{C} = 0$$

As correntes elétricas advindas dos capacitores, no geral, podem ser expressas por fórmulas trigonométricas da seguinte forma:

$$I_1 = A_1.cos(\omega.t + \phi_1)$$

$$I_3 = A_3.cos(\omega.t + \phi_3)$$

As fases garantem que não hajam incoerências no limite em que $t = 0\ s$. Agora podemos substituir as correntes nas EDOs obtidas com as Leis de Kirchhoff:

$$L.\frac{d^2}{dt^2}[A_1.cos(\omega.t + \phi_1)] + 2.\frac{A_1.cos(\omega.t + \phi_1)}{C} + \frac{A_3.cos(\omega.t + \phi_3)}{C} = 0$$

$$L.\frac{d^2}{dt^2}[A_3.cos(\omega.t + \phi_3)] + 2.\frac{A_3.cos(\omega.t + \phi_3)}{C} + \frac{A_1.cos(\omega.t + \phi_1)}{C} = 0$$

Resolvendo as equações, fazendo as derivadas, temos:

$$-\omega^2.L.A_1.cos(\omega.t+\phi_1)+2.\frac{A_1.cos(\omega.t+\phi_1)}{C}+\frac{A_3.cos(\omega.t+\phi_3)}{C}=0$$

$$-\omega^2.L.A_3.cos(\omega.t+\phi_3)+2.\frac{A_3.cos(\omega.t+\phi_3)}{C}+\frac{A_1.cos(\omega.t+\phi_1)}{C}=0$$

Da primeira equação, podemos isolar $A_3.cos(\omega.t+\phi_3)$ fazendo a expressão depender apenas das variáveis de índice 1. Com a primeira, obtemos:

$$A_3.cos(\omega.t+\phi_3)=\omega^2.L.C.A_1.cos(\omega.t+\phi_1)-2.A_1.cos(\omega.t+\phi_1)$$

Substituindo na segunda, encontramos:

$$-\omega^2.L.\big[\omega^2.L.C.A_1.cos(\omega.t+\phi_1)-2.A_1.cos(\omega.t+\phi_1)\big]+$$
$$+2.\frac{\omega^2.L.C.A_1.cos(\omega.t+\phi_1)-2.A_1.cos(\omega.t+\phi_1)}{C}+$$
$$+\frac{A_1.cos(\omega.t+\phi_1)}{C}=0$$

Perceba que $A_1.cos(\omega.t+\phi_1)$ é comum em todos os termos da soma, logo podemos dividir os dois lados da equação por ele:

$$-\omega^2.L.\big[\omega^2.L.C-2\big]+2.\frac{\omega^2.L.C-2}{C}+\frac{1}{C}=0$$

Vamos apenas organizar o resultado para que entendamos melhor a equação:

$$-\omega^4.L^2.C+2.\omega^2.L+2.\omega^2.L-\frac{4}{C}+\frac{1}{C}=0$$

$$-\omega^4.L^2.C+4.\omega^2.L-\frac{3}{C}=0\Rightarrow -L^2.C^2.\omega^4+4.L.C.\omega^2-3=0$$

Perceba que encontramos uma equação de quarto grau cuja variável é exatamente oque queremos saber: os modos normais de vibração do circuito!

Se chamarmos ω^2 de x teremos uma equação do Segundo Grau que pode ser resolvida facilmente:

$$-L^2.C^2.x^2+4.L.C.x-3=0$$

A solução é, portanto:

$$x=\frac{-4.L.C\pm\sqrt{16.L^2.C^2-4.L^2.C^2.3}}{-2.L^2.C^2}=\frac{-4.L.C\pm\sqrt{4.L^2.C^2}}{-2.L^2.C^2}=\frac{-2\pm1}{-L.C}$$

Sendo assim, as duas soluções para x são:

$$x_+=\frac{1}{L.C}$$
$$x_-=\frac{3}{L.C}$$

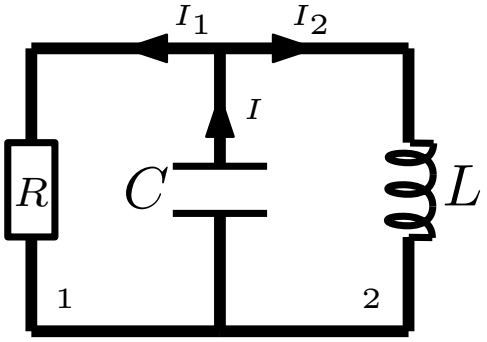
Consequentemente, as soluções dos modos de vibração serão:

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{3}{L.C}}$$

Não devemos considerar o ± da solução quadrática, pois não há sentido físico em uma frequência negativa.

10.5 Circuito RLC



a Frequência angular de oscilação e constante de amortecimento

Inicialmente, aplicamos a Lei das Malhas às duas malhas que temos no circuito, obtendo:

$$-R.I_1 - \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow R.\frac{dI_1}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

$$\frac{Q}{C} + L.\frac{dI_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{I}{C} + L.\frac{d^2I_2}{dt^2} = 0$$

Pela Lei dos nós, é claro que $I = I_1 + I_2$, ou seja, $I_1 = I - I_2$. Substituindo isto na primeira equação, obtida a partir da malha 1, obtemos:

$$R.\frac{d(I - I_2)}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \Rightarrow R.\frac{dI}{dt} - R.\frac{dI_2}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \Rightarrow R.\frac{dI_2}{dt} = R.\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

Derivando de ambos os lados com relação ao tempo encontramos uma equação para a segunda derivada temporal da corrente elétrica I_2:

$$R.\frac{d^2I_2}{dt^2} = R.\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}.\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{d^2I_2}{dt^2} = \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{R.C}.\frac{dI}{dt}$$

Substituindo na equação obtida pela malha 2, obtemos:

$$\frac{I}{C} + L.\left[\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{R.C}.\frac{dI}{dt}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{R.C}.\frac{dI}{dt} + \frac{I}{L.C} = 0$$

Essa EDO é conhecida dos problemas de mecânica. O termo que acompanha a primeira derivada é chamado de amortecimento γ* e o termo que acompanha a função é o quadrado da frequência de oscilação, ou seja:

$$\omega^2 = \frac{1}{L.C}$$

$$\gamma = \frac{1}{R.C}$$

Como há amortecimento, a frequência angular de oscilação livre será dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Substituindo os resultados encontrados, concluímos que:

*Responsável por diminuir a amplitude da oscilação.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L.C} - \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{R.C}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{L.C} - \frac{1}{4.R^2.C^2}}$$

b Calculando numericamente o item passado

Substituindo os valores numéricos no resultado da frequência angular de oscilação, obtemos:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{(10.10^{-3}).(1.10^{-6})} - \frac{1}{4.(10.10^3)^2.(1.10^{-6})^2}} = \sqrt{10^8 - \frac{10^4}{4}} \approx 10^4 \ Hz$$

A energia em função do tempo é dada por:

$$U(t) = \frac{1}{2}.L.A^2.e^{-\gamma.t}$$

Perceba que a energia inicial é $U(0) = \frac{1}{2}.L.A^2$, ou seja, queremos saber o tempo t em que $U(t) = \frac{U(0)}{2}$. Então temos:

$$\frac{1}{2}.L.A^2.e^{-\gamma.t} = \frac{1}{4}.L.A^2 \Rightarrow e^{-\gamma.t} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\gamma.t} = 2$$

Aplicando o logaritmo natural de ambos os lados:

$$\gamma.t = ln(2) \Rightarrow t = \frac{ln(2)}{\gamma} = R.C.ln(2)$$

Queremos o número de períodos, e não o valor de tempo decorrido. Por isso, devemos igualar o tempo levado à um múltiplo do período de oscilação:

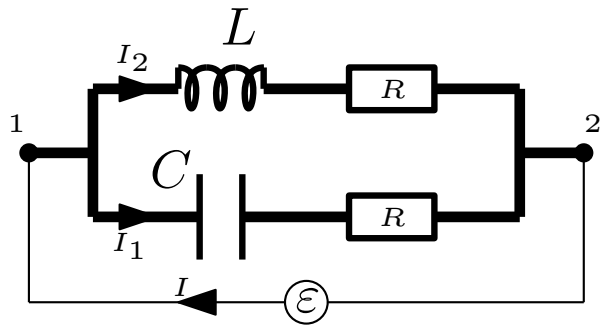
$$n.T = t \Rightarrow n = \frac{t}{T} = t.f = t.\frac{\omega_0}{2.\pi} = R.C.ln(2).\frac{\omega_0}{2.\pi}$$

Substituindo valores, obtemos um resultado numérico:

$$n = (10.10^3).(1.10^{-6}).ln(2).\frac{10^4}{2.\pi} = ln(2).\frac{10^2}{2.\pi} \approx 11$$

Portanto, por conta do amortecimento, após 11 oscilações, o sistema terá apenas metade de sua energia inicial.

10.6 Impedância de circuito



Perceba que o circuito superior LR e o circuito inferior CR terão impedâncias individuais, ou seja, a impedância do circuito completo será a impedância resultante das duas impedâncias individuais associadas em paralelo:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

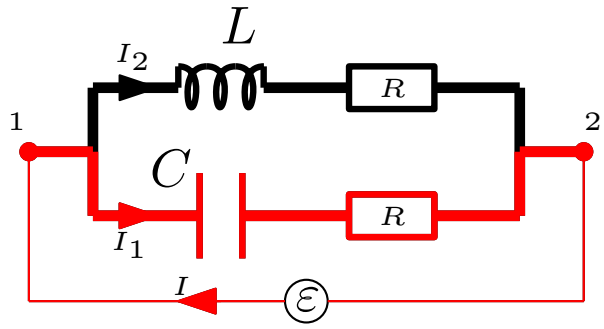
Lembre que podemos expressar tanto a corrente elétrica quanto a diferença de potencial com a notação complexa, ela será útil agora:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}.e^{i.\omega.t}$$

$$I = \bar{I}.e^{i.\omega.t}$$

Com isso, concluímos que a impedância é:

$$Z = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{\bar{\varepsilon}.e^{i.\omega.t}}{\bar{I}.e^{i.\omega.t}} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{I}}$$



Aplicando a Lei das Malhas ao circuito vermelho, obtemos:

$$-\varepsilon + \frac{Q_1}{C} + R.I_1 = 0 \Rightarrow -\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{I_1}{C} + R.\frac{dI_1}{dt} = 0$$

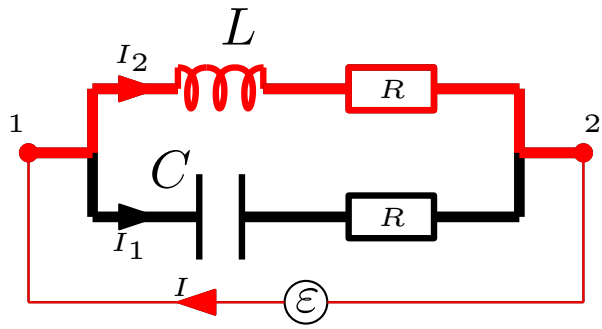
Agora usaremos a notação complexa:

$$-\frac{d(\bar{\varepsilon}.e^{i.\omega.t})}{dt} + \frac{\bar{I}_1.e^{i.\omega.t}}{C} + R.\frac{d(\bar{I}_1.e^{i.\omega.t})}{dt} = 0 \Rightarrow -\bar{\varepsilon}.e^{i.\omega.t}.i.\omega + \frac{\bar{I}_1.e^{i\omega t}}{C} + R.\bar{I}_1.e^{i.\omega.t}.i.\omega = 0$$

$$-\bar{\varepsilon}.i.\omega + \frac{\bar{I}_1}{C} + R.\bar{I}_1.i.\omega = 0 \Rightarrow \bar{I}_1.\left(\frac{1}{C} + R.i.\omega\right) = \bar{\varepsilon}.i.\omega \Rightarrow \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{I}_1} = Z_1 = \frac{1}{i.\omega}.\left(\frac{1}{C} + R.i.\omega\right)$$

Simplificando, obtemos a impedância do circuito 1:

$$Z_1 = \frac{1}{i.\omega.C} + R = R - \frac{i}{\omega.C}$$



Aplicando a Lei das Malhas ao novo circuito vermelho, obtemos:

$$-\varepsilon + L.\frac{dI_2}{dt} + R.I_2 = 0$$

Como não há termos de carga, não precisamos derivar com relação ao tempo, podemos aplicar diretamente a notação complexa:

$$-\bar{\varepsilon}.e^{i.\omega.t} + L.\frac{d(\bar{I}_2.e^{i.\omega.t})}{dt} + R.\bar{I}_2.e^{i.\omega.t} = 0 \Rightarrow -\bar{\varepsilon}.e^{i.\omega.t} + L.\bar{I}_2.e^{i.\omega.t}.i.\omega + R.\bar{I}_2.e^{i.\omega.t} = 0$$

$$-\bar{\varepsilon} + L.\bar{I}_2.i.\omega + R.\bar{I}_2 = 0 \Rightarrow \bar{I}_2.(L.i.\omega + R) = \bar{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{I}_2} = Z_2 = L.i.\omega + R$$

Finalmente, com as impedâncias individuais calculadas, podemos calcular a impedância resultante:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R - \frac{i}{\omega.C}} + \frac{1}{L.i.\omega + R}$$

Quando $\tau_L = \tau_C$[†], temos:

$$Z = \frac{\left(R - \frac{i}{\omega.C}\right).(R + i.L.\omega)}{R - \frac{i}{\omega.C} + L.i.\omega + R} = \frac{R^2 + i.L.\omega.R + \frac{L}{C} - i.\frac{R}{\omega.C}}{2.R - \frac{i}{\omega.C} + L.i.\omega}$$

Como as constantes de tempo são iguais, podemos concluir que $R^2 = \frac{L}{C}$. Logo:

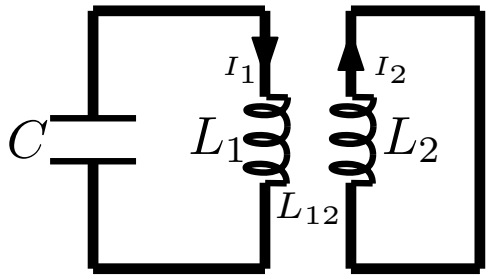
$$Z = \frac{2.R^2 + i.L.\omega.R - i.\frac{R}{\omega.C}}{2.R - \frac{i}{\omega.C} + L.i.\omega} = R.\frac{2.R - \frac{i}{\omega.C} + L.i.\omega}{2.R - \frac{i}{\omega.C} + L.i.\omega} = R$$

Portanto, quando as constantes de tempo são iguais entre si, a impedância não depende da frequência:

$$Z = R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

[†]Lembre que $\tau_C = R.C$ e $\tau_L = \frac{L}{R}$

10.7 Frequência angular de oscilação livre de circuito RL interagindo com bobina



Como as bobinas irão interagir entre si (através da indução mútua), haverá o surgimento de uma corrente elétrica I_2 na bobina de indutância L_2, oque acarretará em mudanças nas equações da Lei das malhas. Teremos o seguinte para ambos os circuitos:

$$\frac{Q_1}{C}+L_1.\frac{dI_1}{dt}+L_{12}.\frac{dI_2}{dt}=0 \Rightarrow \frac{I_1}{C}+L_1.\frac{d^2I_1}{dt^2}+L_{12}.\frac{d^2I_2}{dt^2}=0$$

$$L_2.\frac{dI_2}{dt}+L_{12}.\frac{dI_1}{dt}=0 \Rightarrow L_2.\frac{d^2I_2}{dt^2}+L_{12}.\frac{d^2I_1}{dt^2}=0$$

Com a segunda equação já obtemos uma relação direta entre as correntes elétricas. Com a segunda equação, concluímos que:

$$\frac{d^2I_2}{dt^2}=-\frac{L_{12}}{L_2}.\frac{d^2I_1}{dt^2}$$

Substituindo na primeira, iremos obter uma equação diferencial apenas com I_1:

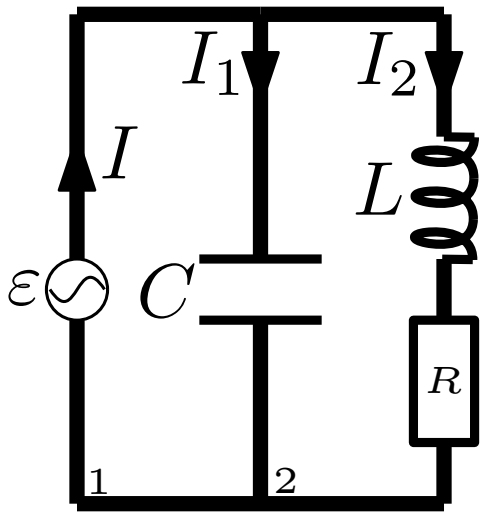
$$\frac{I_1}{C}+L_1.\frac{d^2I_1}{dt^2}-L_{12}.\frac{L_{12}}{L_2}.\frac{d^2I_1}{dt^2}=0 \Rightarrow \left(L_1-\frac{L_{12}^2}{L_2}\right).\frac{d^2I_1}{dt^2}+\frac{I_1}{C}=0$$

$$\frac{d^2I_1}{dt^2}+\frac{1}{C.\left(L_1-\frac{L_{12}^2}{L_2}\right)}.I_1=0$$

Como já vimos anteriormente, essa EDO representa um oscilador harmônico simples com frequência angular igual a raiz quadrada do coeficiente que acompanha a função:

$$\omega^2=\frac{1}{C.\left(L_1-\frac{L_{12}^2}{L_2}\right)}=\frac{L_2}{C.(L_1.L_2-L_{12}^2)} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{L_2}{C.(L_1.L_2-L_{12}^2)}}$$

10.8 Frequência angular de ressonância



Como sempre, vamos começar aplicando a Lei das malhas às duas malhas, obtendo:

$$-\varepsilon + \frac{Q_1}{C} = 0 \Rightarrow -\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{I_1}{C} = 0$$

$$-\frac{Q_1}{C} + L.\frac{dI_2}{dt} + R.I_2 = 0 \Rightarrow -\frac{I_1}{C} + L.\frac{d^2I_2}{dt^2} + R.\frac{dI_2}{dt} = 0$$

Novamente vamos usar a notação complexa da corrente elétrica e para a diferença de potencial:

$$I = \bar{I}.e^{i.\omega.t}$$

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}.e^{i.\omega.t} = \varepsilon_0.e^{i.\omega.t}$$

Lembre que $e^{i.\theta} = cos(\theta) + i.sen(\theta)$, portanto de uma forma ou outra estamos escrevendo a fonte de força eletromotriz $\varepsilon = \varepsilon(t)$ dada no enunciado.

Aplicando à primeira equação, obtemos:

$$-\frac{d(\varepsilon_0.e^{i.\omega.t})}{dt} + \frac{\bar{I}_1.e^{i.\omega.t}}{C} = 0 \Rightarrow -\varepsilon_0.i.\omega.e^{i.\omega.t} + \frac{\bar{I}_1.e^{i.\omega.t}}{C} = 0 \Rightarrow -\varepsilon_0.i.\omega + \frac{\bar{I}_1}{C} = 0$$

$$\frac{\varepsilon_0}{\bar{I}_1} = Z_1 = \frac{1}{i.\omega.C}$$

Para a segunda equação, teremos algo um tanto semelhante, apenas mais extenso:

$$-\frac{I_1}{C} + L.\frac{d^2I_2}{dt^2} + R.\frac{dI_2}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{d\varepsilon}{dt} + L.\frac{d^2I_2}{dt^2} + R.\frac{dI_2}{dt} = 0$$

$$-\frac{d(\varepsilon_0.e^{i.\omega.t})}{dt} + L.\frac{d^2(\bar{I}_2.e^{i.\omega.t})}{dt^2} + R.\frac{d(\bar{I}_2.e^{i.\omega.t})}{dt} = 0$$

$$-i.\omega.\varepsilon_0.e^{i.\omega.t} + L.i^2.\omega^2.\bar{I}_2.e^{i.\omega.t} + R.i.\omega.\bar{I}_2.e^{i.\omega.t} = 0 \Rightarrow -i.\varepsilon_0 - L.\omega.\bar{I}_2 + R.i.\bar{I}_2 = 0$$

$$\frac{\varepsilon_0}{\bar{I}_2} = Z_2 = \frac{-L.\omega + R.i}{i} = i.L.\omega + R$$

Como os circuitos estão paralelo, a impedância resultante é:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = i.\omega.C + \frac{1}{i.L.\omega + R} \Rightarrow Z = \frac{i.L.\omega + R}{(i.\omega.C).(i.L.\omega + R) + 1}$$

Quando circuito estiver em ressonância, a impedância assume um valor real, ou seja, $Im\{Z\} = 0$. Portanto, temos que isolar a parte imaginária da impedância, assim sendo possível de igualá-la a zero. Então, manipulando Z, temos:

$$Z = \frac{i.L.\omega + R}{i^2.L.C.\omega^2 + i.C.R.\omega + 1} = \frac{i.L.\omega + R}{-L.C.\omega^2 + 1 + i.C.R.\omega}$$

$$Z = \frac{i.L.\omega + R}{-L.C.\omega^2 + 1 + i.C.R.\omega}.\frac{-L.C.\omega^2 + 1 - i.C.R.\omega}{-L.C.\omega^2 + 1 - i.C.R.\omega}$$

$$Z = \frac{(i.L.\omega + R).(-L.C.\omega^2 + 1 - i.C.R.\omega)}{(-L.C.\omega^2 + 1)^2 + (C.R.\omega)^2}$$

Como você já deve estar entediado (assim como eu), vamos diretamente mostrar apenas quem é a parte imaginária da impedância. Se você fez tudo certo, deverá encontrar:

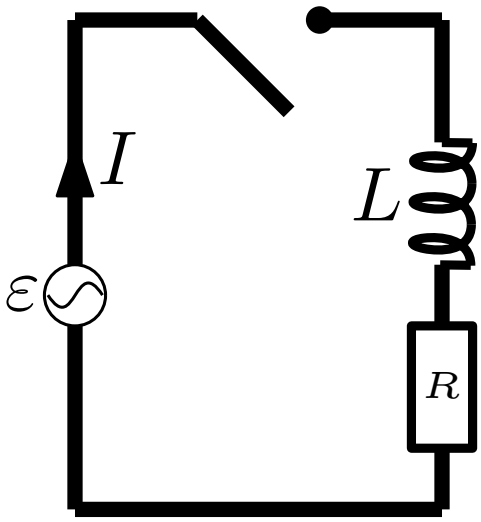
$$Im\{Z\} = \frac{-L^2.C.\omega^3 + L.\omega - C.R^2.\omega}{(-L.C.\omega^2 + 1)^2 + (C.R.\omega)^2}$$

Como isso deve ser igual a zero, teremos que a frequência angular de oscilação é:

$$\frac{-L^2.C.\omega^3 + L.\omega - C.R^2.\omega}{(-L.C.\omega^2 + 1)^2 + (C.R.\omega)^2} = 0 \Rightarrow -L^2.C.\omega^2 + L - C.R^2 = 0 \Rightarrow L^2.C.\omega^2 = L - C.R^2$$

$$\omega^2 = \frac{L}{L^2.C} - \frac{C.R^2}{L^2.C} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{L.C} - \frac{R^2}{L^2}}$$

10.9 Circuito RL com diferença de potencial alternada



a Corrente elétrica no circuito

Aplicando a Lei das Malhas, obtemos:

$$-\varepsilon + L.\frac{dI}{dt} + R.I = 0 \Rightarrow L.\frac{dI}{dt} + R.I = \varepsilon$$

Como $\varepsilon = \varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)$, a equação diferencial ordinária não-homogênea para a corrente elétrica ficará:

$$L.\frac{dI}{dt} + R.I = \varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)$$

A solução de uma E.D.O. não-homogênea é sempre dada pela soma da solução homogênea com uma solução particular qualquer da não-homogênea:

$$I = I_p + I_h$$

Vamos começar pela solução homogênea, ela é a mais simples:

$$L.\frac{dI}{dt} + R.I = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}.I = -\frac{I}{\tau_L} \Rightarrow \frac{dI}{I} = \frac{-dt}{\tau_L}$$

Como não sabemos o valor da corrente elétrica inicial, devemos usar uma incógnita no limite inferior da integral, poderemos encontrar seu valor mais tarde. Mudaremos a variável de integração apenas para que ela não seja confundida com os limites

$$\int_{I_0}^{I_h} \frac{dI'}{I'} = -\int_0^t \frac{-dt'}{\tau_L} \Rightarrow ln(I')\Big|_{I_0}^{I_h} = -\frac{t'}{\tau_L}\Big|_0^t \Rightarrow ln\left(\frac{I_h}{I_0}\right) = -\frac{t}{\tau_L}$$

Aplicando a exponencial de ambos os lados, finalmente obtemos o valor da corrente elétrica para a solução homogênea:

$$I_h = I_0.e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Agora para a solução particular, vamos considerar o de sempre: a representação complexa. Com $I_p = I_0.e^{i.\omega.t}$, obtemos:

$$L.\frac{d}{dt}[I_0.e^{i.\omega.t}] + R.I_0.e^{i.\omega.t} = \varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)$$

$$i.L.\omega.I_0.e^{i.\omega.t} + R.I_0.e^{i.\omega.t} = \varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)$$

$$I_0.e^{i.\omega.t}.(i.L.\omega + R) = \varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)$$

$$I_p.(i.L.\omega + R) = \varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big) \Rightarrow I_p = \frac{\varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)}{i.L.\omega + R}$$

Como o denominador é complexo, é conveniente escrevermos ele como seu módulo multiplicado pela fase:

$$d = i.L.\omega + R \Rightarrow d = |d|.e^{i.\Phi_L} = \sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}.e^{i.\Phi_L}$$

Com $\Phi_L = arctg\Big(\frac{\omega.L}{R}\Big)$.

Logo, a solução particular é:

$$I_p = \frac{\varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}.e^{i.\Phi_L}} = \frac{\varepsilon_0.sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big)}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.e^{-i.\Phi_L}$$

Podemos ainda simplificar mais as coisas, a função trigonométrica pode ser escrita como:

$$sen\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4}\Big) = cos\Big(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\Big) = e^{i.\left(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Portanto, teremos:

$$I_p = \frac{\varepsilon_0.e^{i.\left(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.e^{-i.\Phi_L} = \frac{\varepsilon_0.e^{i.\left(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \Phi_L - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}$$

Voltando à notação trigonométrica, finalmente obtemos a fórmula final para a solução particular da corrente elétrica:

$$I_p = \frac{\varepsilon_0.cos\big(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \Phi_L - \frac{\pi}{2}\big)}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}} \Rightarrow I_p = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.sen\left(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \Phi_L\right)$$

Portanto, a solução geral será:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.sen\left(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \Phi_L\right) + I_0.e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Em $t = 0\ s$ a corrente elétrica resultante deve ser nula. Aplicando essa condição de contorno podemos descobrir a constante I_0:

$$\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.sen\left(\frac{\pi}{4} - \Phi_L\right) + I_0 = 0 \Rightarrow I_0 = -\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.sen\left(\frac{\pi}{4} - \Phi_L\right)$$

Agora sim a solução está completa:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.sen\left(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \Phi_L\right) - \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.sen\left(\frac{\pi}{4} - \Phi_L\right).e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$I = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2.L^2 + R^2}}.\left[sen\left(\omega.t + \frac{\pi}{4} - \Phi_L\right) - sen\left(\frac{\pi}{4} - \Phi_L\right).e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right]$$

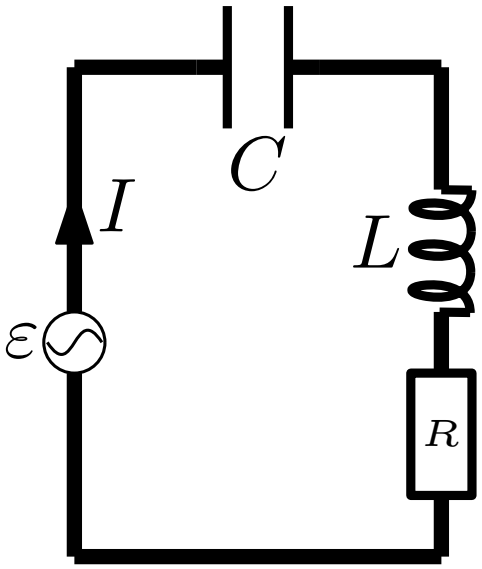
b Termo transiente nulo

O termo transiente é o que decai exponencialmente. Para que ele seja zero, o coeficiente que o acompanha deve ser nulo:

$$sen\left(\frac{\pi}{4} - \Phi_L\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \Phi_L = 0 \Rightarrow \Phi_L = \frac{\pi}{4} \Rightarrow arctg\left(\frac{\omega.L}{R}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\omega.L}{R} = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\omega = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau_L}$$

10.10 Circuito RLC com diferença de potencial alternada



Inicialmente, podemos apenas descobrir a carga armazenada nas placas do capacitor, isso será o suficiente para determinarmos os itens ***(a)*** e ***(b)***. Então, aplicando a Lei das Malhas à única malha do circuito, obtemos:

$$-\varepsilon+\frac{Q}{C}+L.\frac{dI}{dt}+R.I=0 \Rightarrow -\varepsilon+\frac{Q}{C}+L.\frac{d^2Q}{dt^2}+R.\frac{dQ}{dt}=0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}.\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{L.C}=\frac{\varepsilon}{L}$$

Para facilitarmos as coisas, chamaremos $\gamma=\frac{R}{L}$ e $\omega_0^2=\frac{1}{L.C}$.

Assim, obtemos a seguinte Equação Diferencial Ordinária não-homogênea:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\gamma.\frac{dQ}{dt}+\omega_0^2.Q=\frac{\varepsilon}{L}$$

Novamente, iremos recorrer à notação complexa, sendo:

$$Q=\bar{Q}.e^{i.\omega.t}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_0.e^{i.\omega.t}$$

Aplicando, obtemos:

$$\frac{d^2}{dt^2}[\bar{Q}.e^{i.\omega.t}]+\gamma.\frac{d}{dt}[\bar{Q}.e^{i.\omega.t}]+\omega_0^2.[\bar{Q}.e^{i.\omega.t}]=\frac{\varepsilon_0.e^{i.\omega.t}}{L}$$

$$i^2.\omega^2.\bar{Q}.e^{i.\omega.t}+\gamma.i.\omega.\bar{Q}.e^{i.\omega.t}+\omega_0^2.\bar{Q}.e^{i.\omega.t}=\frac{\varepsilon_0}{L}.e^{i.\omega.t} \Rightarrow -\omega^2.\bar{Q}+\gamma.i.\omega.\bar{Q}+\omega_0^2.\bar{Q}=\frac{\varepsilon_0}{L}$$

$$\bar{Q}.[-\omega^2+\gamma.i.\omega+\omega_0^2]=\frac{\varepsilon_0}{L} \Rightarrow \bar{Q}=\frac{\varepsilon_0}{L.[-\omega^2+\gamma.i.\omega+\omega_0^2]}$$

Perceba que $-\omega^2+\gamma.i.\omega+\omega_0^2$, que chamaremos de Φ é complexo, por isso pode ser escrito na forma $|\Phi|.e^{i.\theta}$, isso nos dará:

$$\Phi^2=(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2.e^{i.\theta}$$

Sendo $tg(\theta)=\frac{\gamma.\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$.

Portanto, $\bar{Q}$ é:

$$\bar{Q} = \frac{\varepsilon_0}{L.|\Phi|.e^{i.\theta}} = \frac{\varepsilon_0}{L.|\Phi|}.e^{-i.\theta}$$

Finalmente, a carga nas placas do capacitor é:

$$Q = \bar{Q}.e^{i.\omega.t} = \frac{\varepsilon_0}{L.|\Phi|}.e^{-i.\theta}.e^{i.\omega.t} = \frac{\varepsilon_0}{L.\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}}.e^{i.(\omega.t-\theta)}$$

Pela Relação de Euler, teremos então:

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0}{L.\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}}.cos(\omega.t-\theta)$$

a No capacitor

Partindo da definição de capacitância, a diferença de potencial nas placas do capacitor será:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow V = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon_0}{C.L.\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}}.cos(\omega.t-\theta)$$

O valor V é máximo, quando o denominador da expressão é mínimo. Então podemos derivá-lo e igualá-lo à zero. Como queremos a condição em função de ω, a derivada deve ser feita em função dele.

$$\frac{d}{d\omega}[C.L.\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2]^{\frac{-1}{2}}.[2.(\omega_0^2-\omega^2).(-2.\omega)+2.(\gamma.\omega).\gamma] = 0$$

$$2.(\omega_0^2-\omega^2).(-2.\omega)+2.(\gamma.\omega).\gamma = 0 \Rightarrow -4.(\omega_0^2-\omega^2)+2.\gamma^2 = 0 \Rightarrow 2.(\omega_0^2-\omega^2) = \gamma^2$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}.\gamma^2}$$

Teoricamente, devemos derivar novamente, substituir o valor de ω encontrado e avaliar o sinal do resultado. Deixarei isso como exercício para o leitor.

b No indutor

Para o indutor, teremos que usar a definição de corrente elétrica para obtermos o resultado em função da carga nas placas do capacitor:

$$V = L.\frac{dI}{dt} = L.\frac{d^2Q}{dt^2}$$

Substituindo a carga, obtemos:

$$V = L.\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\varepsilon_0}{L.\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}}.cos(\omega.t-\theta)\right] = L.\frac{\varepsilon_0}{L.\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}}.\frac{d^2}{dt^2}[cos(\omega.t-\theta)]$$

$$V = \frac{-\omega^2.\varepsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}}.cos(\omega.t-\theta) = \frac{-\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}{\omega^4}}}.cos(\omega.t-\theta)$$

Novamente, a diferença de potencial é máxima quando o denominador for mínimo. Por isso, faremos o mesmo processo que foi feito no ***item (a)***:

$$\frac{d}{d\omega}\left[\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}{\omega^4}}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}.\left[\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2}{\omega^4}\right]^{\frac{-1}{2}}.\frac{\frac{d}{d\omega}[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2].\omega^4-[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2].\frac{d}{d\omega}[\omega^4]}{\omega^8} = 0$$

A expressão ficará muito extensa, então já vamos simplificá-la antes de fazer as derivadas:

$$\frac{d}{d\omega}[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2].\omega^4-[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2].\frac{d}{d\omega}[\omega^4] = 0$$

$$[2.(\omega_0^2-\omega^2).(-2\omega)+2.(\gamma.\omega).\gamma].\omega^4-[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2].4.\omega^3 = 0$$

$$[(\omega_0^2-\omega^2).(-2\omega)+(\gamma.\omega).\gamma].\omega-[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma.\omega)^2].2 = 0$$

$$[-2.\omega_0^2.\omega+2.\omega^3+\gamma^2.\omega].\omega-[\omega_0^4+\omega^4-2.\omega^2.\omega_0^2+\gamma^2.\omega^2].2 = 0$$

$$-2.\omega_0^2.\omega^2+2.\omega^4+\gamma^2.\omega^2-2.\omega_0^4-2.\omega^4+4.\omega^2.\omega_0^2-2.\gamma^2.\omega^2 = 0$$

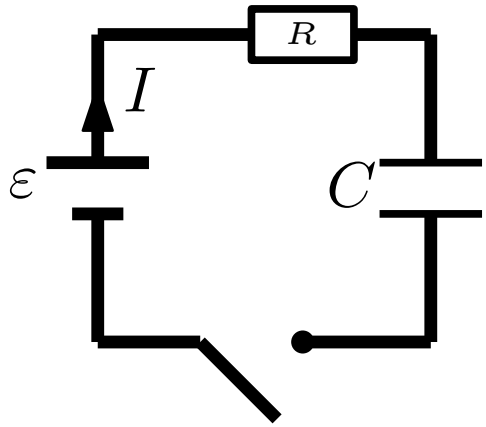
Agora devemos simplificar a expressão:

$$-2.\omega_0^4+2.\omega^2.\omega_0^2-\gamma^2.\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2.(2.\omega_0^2-\gamma^2) = 2.\omega_0^4$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2.\omega_0^4}{2.\omega_0^2-\gamma^2}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{2}.\gamma^2}}$$

Novamente, sendo mais rigorosos, deveríamos derivar a expressão mais uma vez e substituir o valor de ω encontrado. Esta atividade chata fica à cargo do leitor.

10.11 Circuito RC após ligar a chave



a A corrente elétrica

Aplicando diretamente a Lei das Malhas à única malha que temos, obtemos:

$$-\varepsilon + R.I + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow R.\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

Temos 2 diferenciais, dI e dt. Iremos separar as variáveis em cada lado da equação para que a integração seja possível:

$$R.\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{C} = \frac{-I}{C} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{-I}{R.C}$$

Então, temos:

$$\frac{dI}{-I} = \frac{dt}{RC}$$

Trocaremos a variável de integração para $'$ apenas para que ela não se confunda com os limites de integração:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI'}{-I'} = \int_0^t \frac{dt'}{RC} = \frac{1}{R.C}.t'\Big|_0^t = \frac{t}{R.C}$$

A integral em I' é resolvida também de forma simples:

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI'}{I'} = \frac{-t}{R.C} \Rightarrow ln(I')\Big|_{I_0}^{I} = \frac{-t}{R.C} \Rightarrow ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{-t}{R.C}$$

Aplicando a exponencial de ambos os lados podemos isolar a corrente elétrica I:

$$\frac{I}{I_0} = e^{\frac{-t}{R.C}} \Rightarrow I = I_0.e^{\frac{-t}{R.C}} = \frac{\varepsilon}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}$$

b Energia armazenada no capacitor

Como sabemos, a energia armazenada é dada por $U = \frac{Q^2}{2.C}$, ou seja, devemos determinar a carga total armazenada no capacitor após um longo período. Partindo da definição de corrente elétrica, temos:

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I.dt \Rightarrow Q = \int_0^{\infty} I\ dt$$

Como já sabemos a função que descreve a corrente elétrica, podemos calcular o valor da integral diretamente:

$$Q = \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}\ dt = \frac{\varepsilon}{R}.\int_0^\infty e^{\frac{-t}{R.C}}\ dt$$

Essa integral pode ser calculada por substituição simples, sendo $u = \frac{-t}{R.C}$, teremos $du = -\frac{dt}{R.C}$ e os limites de integração também se alterarão.

$$Q = \frac{\varepsilon}{R}.\int_0^{-\infty} e^u(-R.C)\ du = -\varepsilon.C.\int_0^{-\infty} e^u\ du = -\varepsilon.C.e^u\Big|_0^{-\infty} = -\varepsilon.C.(e^{-\infty} - e^0)$$

$$Q = \varepsilon.C$$

Logo, consequentemente, a energia armazenada após um longo tempo é:

$$U = \frac{(\varepsilon.C)^2}{2.C} = \frac{\varepsilon^2.C}{2}$$

c Energia fornecida pela bateria

Sabemos que a potência fornecida é $\varepsilon.I$. Pela definição de potência, a energia total será:

$$P = \frac{dU}{dt} = \varepsilon.I = \varepsilon.\frac{\varepsilon}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}} \Rightarrow U = \int_0^\infty \varepsilon.\frac{\varepsilon}{R}.e^{\frac{-t}{R.C}}\ dt = \frac{\varepsilon^2}{R}.\int_0^\infty e^{\frac{-t}{R.C}}\ dt$$

Essa integral foi resolvida no ***item (b)***. Agora colocaremos apenas o resultado, é o suficiente:

$$U = \frac{\varepsilon^2}{R}.(-R.C).(e^{-\infty} - e^0) = \varepsilon^2.C$$

d Energia dissipada no resistor

Faremos o mesmo processo do ***item (c)***, mas agora a potência dissipada é $R.I^2$. Logo, pela definição de potência, obtemos:

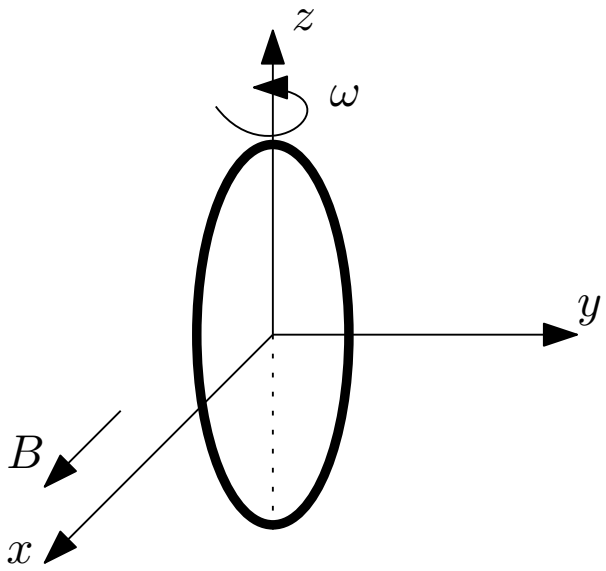
$$P = \frac{dU}{dt} = R.\frac{\varepsilon^2}{R^2}.e^{\frac{-2.t}{R.C}} = \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{\frac{-2.t}{R.C}} \Rightarrow U = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R}.e^{\frac{-2.t}{R.C}}\ dt$$

Temos a mesma integral, com exceção do fator 2 na exponencial. Então o resultado é:

$$U = \frac{\varepsilon^2}{R}.\int_0^\infty e^{\frac{-2.t}{R.C}}\ dt = \frac{\varepsilon^2}{R}.\frac{(-R.C)}{2}.(e^{-\infty} - e^0) = \frac{\varepsilon^2.C}{2}$$

Ou seja, após um tempo suficientemente grande, metade da energia fornecida pela fonte é armazenada no capacitor e a outra metade é consumida no resistor.

10.12 Espira circular girando em torno do eixo z



a Força eletromotriz e corrente elétrica induzida na espira

Partindo da definição de fluxo magnético, temos:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S.cos(\theta) = B.\pi.a^2.cos(\theta)$$

Pela Lei de Faraday, a variação temporal dessa grandeza é igual ao negativo da força eletromotriz induzida:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[B.\pi.a^2.cos(\theta)]$$

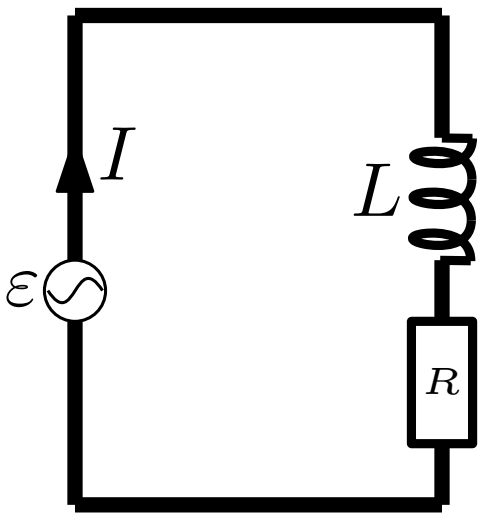
$$\varepsilon = -B.\pi.a^2.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d}{d\theta}[cos(\theta)]$$

$$\varepsilon = B.\pi.a^2.\omega.sen(\theta)$$

Sabemos da cinemática da rotação que $\theta = \omega.t$, portanto:

$$\varepsilon = B.\pi.a^2.\omega.sen(\omega.t)$$

Como a espira tem auto-indutância, a corrente elétrica induzida **não** será simplesmente $\frac{\varepsilon}{R}$, teremos que desenhar um circuito equivalente ao sistema.



Aplicando a Lei das Malhas, obtemos:

$$-\varepsilon + L.\frac{dI}{dt} + R.I = 0$$

Usaremos a notação complexa novamente, mas agora perceba que agora há uma fase na diferença de potencial, pois $\varepsilon \propto sen(\omega.t)$. Consequentemente, a corrente elétrica também terá uma fase (mas não precisamos nos preocupar com ela):

$$\varepsilon = \varepsilon_0.e^{i.(\omega.t+\frac{\pi}{2})}$$

$$I = I_0.e^{i.(\omega.t+\phi)}$$

Sendo $\varepsilon_0 = B.\pi.a^2.\omega$, que é a parte constante da diferença de potencial obtida anteriormente.

Então, teremos:

$$-\varepsilon_0.e^{i.(\omega.t+\frac{\pi}{2})} + L.\frac{d}{dt}[I_0.e^{i.(\omega.t+\phi)}] + R.I_0.e^{i.(\omega.t+\phi)} = 0$$

$$-\varepsilon_0.e^{i.(\omega.t+\frac{\pi}{2})} + L.i.\omega.I_0.e^{i.(\omega.t+\phi)} + R.I_0.e^{i.(\omega.t+\phi)} = 0$$

$$-\varepsilon_0.e^{i.(\omega.t+\frac{\pi}{2})} + (L.i.\omega + R).I_0.e^{i.(\omega.t+\phi)} = 0 \Rightarrow -\varepsilon_0.e^{i.(\omega.t+\frac{\pi}{2})} + (L.i.\omega + R).I = 0$$

$$I = \frac{\varepsilon_0.e^{i.(\omega.t+\frac{\pi}{2})}}{L.i.\omega + R}$$

Perceba que o denominador é complexo, então se chamarmos ele de d, ele poderá ser escrito como:

$$d = |d|.e^{i.\varphi} = \sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}.e^{i.\varphi}$$

Com $\varphi = arctg\left(\frac{L.\omega}{R}\right)$.

Substituindo na equação da corrente elétrica, obtemos:

$$I = \frac{\varepsilon_0.e^{i.(\omega.t+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}.e^{i.\varphi}} = \frac{\varepsilon_0.e^{i.(\omega.t-\varphi+\frac{\pi}{2})}}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}}$$

Pela Relação de Euler, obtemos finalmente a corrente elétrica:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}}.sen(\omega.t - \varphi) = \frac{B.\pi.a^2.\omega}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}}.sen(\omega.t - \varphi)$$

b Vetor momento de dipolo magnético

Pela simetria do círculo, o vetor momento de dipolo poderá ser escrito como:

$$\vec{m} = I.\vec{S} = I.S.(cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y}) = I.S.(cos(\omega.t)\ \hat{x} + sen(\omega.t)\ \hat{y})$$

Substituindo os valores encontrados, obtemos:

$$\vec{m} = \frac{B.\pi.a^2.\omega}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}}.sen(\omega.t - \varphi).\pi.a^2.(cos(\omega.t)\ \hat{x} + sen(\omega.t)\ \hat{y})$$

$$\vec{m} = \frac{B.\pi^2.a^4.\omega}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}}.sen(\omega.t - \varphi).(cos(\omega.t)\ \hat{x} + sen(\omega.t)\ \hat{y})$$

c Torque sobre a espira

O torque pode ser calculado com $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ ou matricialmente com:

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} m_x & m_y & m_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix}$$

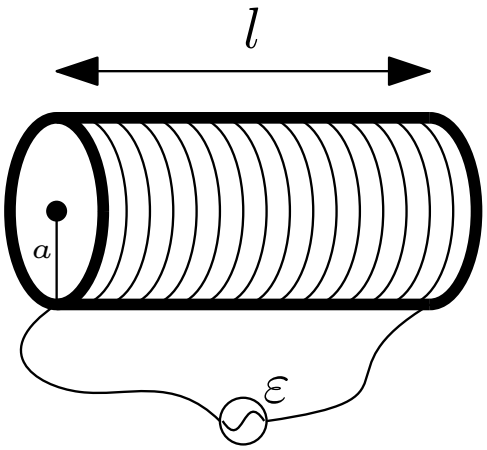
Vamos usar o método matricial. Como nosso vetor momento de dipolo magnético só tem componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ e o campo magnético só tem componente $\hat{z}$, obtemos:

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} m_x & m_y & 0 \\ B_x & 0 & 0 \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{vmatrix} = -m_y.B_x\ \hat{z}$$

Portanto, o torque é:

$$\vec{\tau} = -\frac{B.\pi^2.a^4.\omega}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}}.sen(\omega.t - \varphi).B.sen(\omega.t)\ \hat{z}$$

10.13 Fio metálico enrolado em cilindro de madeira



a Resistência do fio

Pela segunda Lei de Ohm, a resistência total do fio dependerá da resistividade, área transversal e comprimento total do fio, a única informação que não foi dada diretamente é a última. Como sabemos que o fio foi enrolado com N espiras de raio a, seu comprimento total é:

$$L = N.2.\pi.a$$

Portanto, pela segunda Lei de Ohm, obtemos:

$$R = \frac{\rho.L}{A} = \frac{\rho.N.2.\pi.a}{S}$$

b A auto-indutância do fio

O campo magnético dentro de um solenoide já é conhecido:

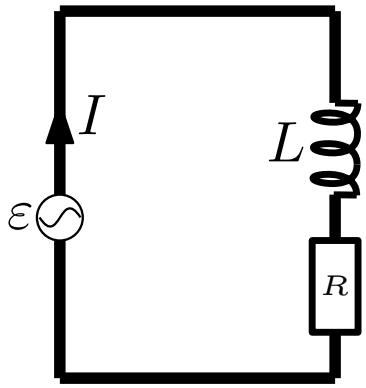
$$B = \mu_0.n.I = \mu_0.\frac{N}{l}.I$$

Portanto o fluxo do campo magnético relacionado às N espiras é:

$$\Phi = \vec{B} \cdot N.\vec{A} = N.B.A.cos(0) = N.\mu_0.\frac{N}{l}.I.\pi.a^2 = \frac{\mu_0.N^2.\pi.a^2}{l}.I$$

Pela definição de indutância, obtemos que a auto-indutância será:

$$\frac{\Phi}{I} = L = \frac{\mu_0.N^2.\pi.a^2}{l}$$



c Diferença de fase entre a corrente elétrica e a diferença de potencial

Já resolvemos literalmente esse circuito no ***Problema 10.12*** no ***item (a)***. Lá, encontramos:

$$I = \frac{B.\pi.a^2.\omega}{\sqrt{L^2.\omega^2 + R^2}}.sen(\omega.t - \varphi)$$

Portanto, a diferença é o $-\varphi$. Concluindo então que:

$$\Delta\phi = -\varphi = -arctg\Big(\frac{L.\omega}{R}\Big)$$

CAPÍTULO

11

MATERIAIS MAGNÉTICOS

"A realidade última é como um poço sem fundo; quanto mais profundamente cavamos, mais camadas de mistério descobrimos sob cada verdade desvendada."

Niels Bohr

11.1 Razão entre o raio quadrático médio e o raio de Bohr para o gás Hélio

A Fórmula de Langevin nos permite relacionar a susceptibilidade magnética e o raio quadrático médio para materiais não ferromagnéticos, que é o caso do gás Hélio:

$$\chi_m = -N.\mu_0.\frac{Z.e^2}{6.m_e}.\langle r^2\rangle \Rightarrow \langle r^2\rangle = -\frac{\chi_m}{N.\mu_0}.\frac{6.m_e}{Z.e^2}$$

Como o gás Hélio tem $Z = 2$, obtemos:

$$\langle r^2\rangle = -\frac{\chi_m}{N.\mu_0}.\frac{6.m_e}{2.e^2} = -\frac{\chi_m}{N.\mu_0}.\frac{3.m_e}{e^2}$$

O sinal negativo irá sumir, pois a susceptibilidade é negativa. Assim poderemos aplicar a raiz quadrada de ambos os lados:

$$\sqrt{\langle r^2\rangle} = \sqrt{\frac{|\chi_m|}{N.\mu_0}.\frac{3.m_e}{e^2}} = \frac{1}{e}.\sqrt{\frac{|\chi_m|}{N.\mu_0}.3.m_e}$$

Então a razão que estamos buscando é:

$$\frac{\sqrt{\langle r^2\rangle}}{a_0} = \frac{1}{e.a_0}.\sqrt{\frac{|\chi_m|}{N.\mu_0}.3.m_e}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{\sqrt{\langle r^2\rangle}}{a_0} = \frac{1}{(1,6.10^{-19}).(0,0529.10^{-9})}.\sqrt{\frac{2,4.10^{-11}}{(1.6.10^{23}).(4.\pi.10^{-7})}.3.(9,11.10^{-31})} = 1,1$$

11.2 Magnetização do ferro

a Número de elétrons contribuintes ao campo magnético

Como o Ferro é um meio magnético linear, então vale as relações:

$$B = \mu.H$$

$$M = \chi_m.H$$

Portanto, vale:

$$\frac{B}{M} = \frac{\mu.H}{\chi_m.H} = \frac{\mu}{\chi_m} = \frac{\mu_0.(1+\chi_m)}{\chi_m}$$

Para ferromagnéticos, a razão $\frac{\mu}{\mu_0}$ atinge valores da ordem de 10^4, ou seja, teremos $\chi_m \approx 10^4$. Isso implica em:

$$\frac{B}{M} = \mu_0$$

A magnetização M será o produto entre a o número de átomos por volume, o número de elétrons por átomo e a magnetização de Bohr, matematicamente:

$$M = N.n.m_B$$

Substituindo, podemos isolar n:

$$\frac{B}{N.n.m_B} = \mu_0 \Rightarrow n = \frac{B}{N.m_B.\mu_0}$$

O valor de átomos por volume não foi dado diretamente, mas com os dados que nos foram cedidos no enunciado é possível descobrirmos. O valor de N pode ser descoberto com o produto entre o número de Avogadro (N_A), densidade de massa (ρ) e o inverso da massa atômica $(M_A)^*$:

$$N = \frac{N_A.\rho}{M_A}$$

Substituindo tudo na equação inicial já seremos capazes de encontrar numericamente o número de elétrons.

$$n = \frac{B.M_A}{N_A.\rho.m_B.\mu_0} = \frac{(2).(55,8)}{(6.10^{23}).(7,9.10^3).(9,3.10^{-24}).(4.\pi.10^{-7})} = 2$$

*Caso cause estranheza, verifique as unidades de medida, e reflita um pouco sobre elas, isso possivelmente ajudará.

b Supondo que o ferro seja paramagnético

No caso de um paramagnético, a susceptibilidade magnética dependerá explicitamente do inverso da temperatura:

$$\chi_m = \frac{N.\mu_0.m_0^2}{3.K.T}$$

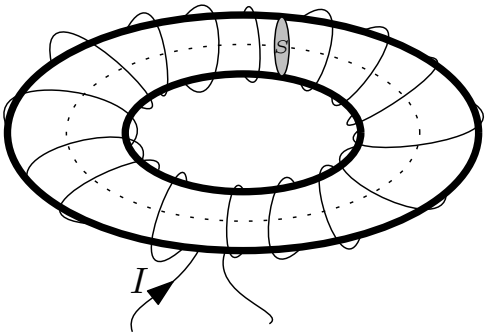
Ainda vale a relação que encontramos para N, então:

$$\chi_m = \frac{N_A.\rho}{M_A}.\frac{\mu_0.m_0^2}{3.K.T}$$

Substituindo os valores podemos descobrir qual seria a susceptibilidade magnética do ferro a 300 K.

$$\chi_m = \frac{6.10^{23}.(7,9.10^3)}{55,8}.\frac{(4.\pi.10^{-7}).(10^{-23})^2}{3.(1,38.10^{-23}).(300)} = 3.10^{-3}$$

11.3 Anel de Rowland



a Energia armazenada no anel

O diferencial de energia associado à um campo magnético dB, como vimos durante o capítulo, é:

$$dU = N.S.I.dB$$

Que é obtido partindo da força eletromotriz induzida pela variação temporal do campo magnético. Podemos ainda expressar o campo magnético em função do fluxo:

$$\Phi = \vec{B} \cdot N.\vec{S} = N.B.S.cos(0) \Rightarrow d\Phi = N.S.dB$$

Portanto, substituindo, obtemos:

$$dU = N.S.I.\frac{d\Phi}{N.S} \Rightarrow dU = I.d\Phi$$

Como $\Phi = \mu.\frac{N^2.S}{l}.I$, podemos considerar um diferencial de corrente elétrica e usá-lo para integrar.

$$dU = I.\mu.\frac{N^2.S}{l}.dI \Rightarrow U = \int I.\mu.\frac{N^2.S}{l}\ dI = \mu.\frac{N^2.S}{l}.\int I\ dI = \mu.\frac{N^2.S}{l}.\frac{I^2}{2}$$

Agora teremos que fazer manipulações para que apareça oque queremos. Vamos tentar expressar a energia em função das seguintes duas grandezas:

$$R = \frac{l}{\mu.S}$$

$$\Phi_1 = \frac{N.I.\mu.S}{l}$$

Então, a energia é:

$$U = \frac{N.I.\mu.S}{l}.\frac{N.I}{2} = \left(\frac{N.I.\mu.S}{l}\right)^2.\frac{l}{N.I.\mu.S}.\frac{N.I}{2} = \frac{1}{2}.\frac{l}{\mu.S}.\left(\frac{N.I.\mu.S}{l}\right)^2$$

$$U = \frac{1}{2}.R.\Phi_1^2$$

b Autoindutância do anel

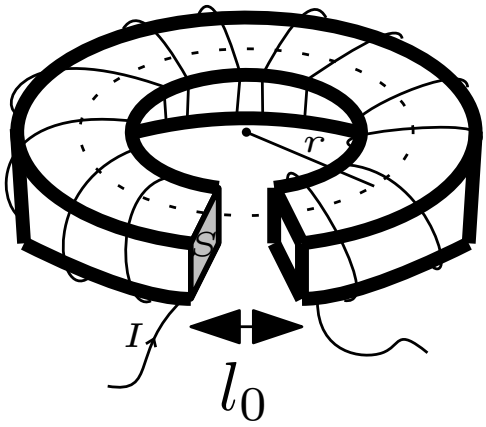
Partindo da definição de autoindutância, obtemos:

$$\Phi = \mu.\frac{N^2.S}{l}.I \Rightarrow \frac{\Phi}{I} = L = \Phi = \mu.\frac{N^2.S}{l}$$

Com $R = \frac{l}{\mu.S}$, chegamos a conclusão que:

$$L = N^2.\frac{\mu.S}{l} = N^2.\frac{1}{\frac{l}{\mu.S}} = \frac{N^2}{R}$$

11.4 Anel de Rowland de ferro



a Permeabilidade magnética relativa

Para um circuito C qualquer, lembre que vale:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Como temos um número N de espiras, e o campo magnético é constante (não há alastramento):

$$H_{fe}.l_{fe} + H_{entr}.l_{entr} = N.I$$

Para cada campo H, vale:

$$H_{fe} = \frac{B_{fe}}{\mu_{fe}} = \frac{B_0}{\kappa.\mu_0}$$

$$H_{entr} = \frac{B_{entr}}{\mu_{entr}} = \frac{B_0}{\mu_0}$$

Substituindo na equação inicial:

$$\frac{B_0}{\kappa.\mu_0}.l_{fe} + \frac{B_0}{\mu_0}.l_{entr} = N.I$$

Isolando a permeabilidade magnética κ, obtemos:

$$\frac{B_0}{\kappa.\mu_0}.l_{fe} = N.I - \frac{B_0}{\mu_0}.l_{entr} \Rightarrow \frac{B_0}{\mu_0}.l_{fe} = \kappa.\left[N.I - \frac{B_0}{\mu_0}.l_{entr}\right]$$

$$\kappa = \frac{B_0.l_{fe}}{\mu_0.N.I - B_0.l_{entr}}$$

Lembre que l_{fe} e l_{entr} são os comprimentos, respectivamente, da região com ferro e do entreferro. Ou seja, temos:

$$l_{fe} = 2.\pi.r - l_0$$

$$l_{entr} = l_0$$

Finalmente, temos:

$$\kappa = \frac{B_0.(2.\pi.r - l_0)}{\mu_0.N.I - B_0.l_0}$$

Substituindo os valores, encontramos a permeabilidade magnética relativa do ferro numericamente:

$$\kappa = \frac{(1).(2.\pi.\left(\frac{10.10^{-2}}{2}\right) - (10^{-3}))}{(4.\pi.10^{-7}).(1000).(1) - (1).(10^{-3})} = 1,22.10^{3}$$

b Campo $\vec{H}$ no interior do ferro

Como vimos, o campo H pode ser expresso em função do campo magnético e da permeabilidade magnética do meio:

$$H_{fe} = \frac{B_{fe}}{\mu_{fe}} = \frac{B_0}{\kappa.\mu_0} = \frac{1}{(1,22.10^3).(4.\pi.10^{-7})} = 652\ \frac{A}{m}$$

c Razão entre o campo $\vec{H}$ no entreferro e no material

Podemos usar diretamente a relação entre o campo H e a constante de permeabilidade magnética:

$$\frac{H_{entr}}{H_{fe}} = \frac{\frac{B_{entr}}{\mu_{entre}}}{\frac{B_{fe}}{\mu_{fe}}} = \frac{\frac{B_0}{\mu_0}}{\frac{B_0}{\kappa.\mu_0}} = \frac{B_0}{\mu_0}.\frac{\kappa.\mu_0}{B_0} = \kappa$$

Portanto, concluímos que a razão entre os campos H de fora e de dentro do ferro é igual à permeabilidade magnética encontrada no ***item (a)***:

$$\frac{H_{entr}}{H_{fe}} = 1,22.10^3$$

11.5 Calculando outras grandezas do *Problema* anterior

Iremos tomar como base a mesma figura do ***Problema*** anterior, então caso hajam dúvidas, consulte o ***Problema 11.4***.

a A energia armazenada no interior do ferro

A quantidade de energia por volume:

$$u = \frac{B^2}{2.\mu} \Rightarrow \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2.\mu} \Rightarrow U = \frac{B^2}{2.\mu}.V$$

O volume V a ser considerado é o volume ocupado pelo ferro, por isso devemos desconsiderar o entreferro:

$$V = S.2.\pi.r - S.l_0 = S.(2.\pi.r - l_0) = S.(2.\pi.r - l_0)$$

E também devemos nos lembra que em meio materiais $\mu \neq \mu_0$:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \kappa_m \Rightarrow \mu = \kappa_m.\mu_0$$

Substituindo todas as informações na equação inicial:

$$U = \frac{B^2}{2.\kappa_m.\mu_0}.S.(2.\pi.r - l_0)$$

Substituindo os valores, obtemos a quantidade de energia numericamente:

$$U = \frac{(1)^2}{2.(1,22.10^3).(4.\pi.10^{-7})}.(1.10^{-4}).(2.\pi.\Big(\frac{10.10^{-2}}{2}\Big) - 10^{-3}) = 0,01\ J$$

b A energia armazenada no entreferro

Como agora estamos no entreferro, o volume será $V = l_0.A$ e a constante de permeabilidade magnética será a do vácuo, pois $\kappa_m = 1$. Logo, a energia é:

$$U = \frac{B^2}{2.\mu_0}.l_0.A$$

Novamente, temos que apenas substituir os valores:

$$U = \frac{(1)^2}{2.(4.\pi.10^{-7})}.(10^{-3}).(10^{-4}) = 0,04\ J$$

c A auto-indutância do sistema

O fluxo magnético no anel é dado por:

$$\Phi = N.B.A$$

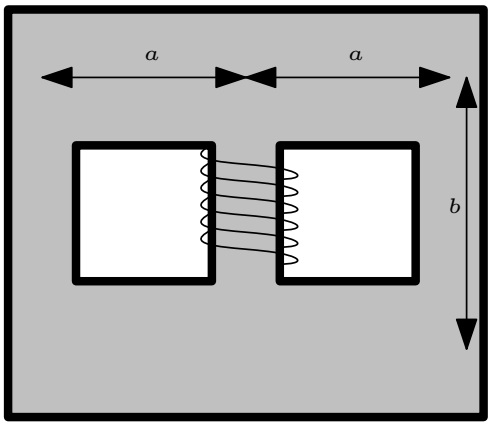
Com base na definição de auto-indutância, obtemos:

$$\frac{\Phi}{I} = \frac{N.B.A}{I} \Rightarrow L = \frac{N.B.A}{I}$$

Substituindo os valores, temos:

$$L = \frac{(1000).(1).(10^{-4})}{1} = 0,1\ H$$

11.6 Campo magnético em diferentes pontos de um material



Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, o fluxo total do braço central deve ser igual a soma dos fluxos magnéticos nos braços laterais, ou seja:

$$\Phi_1 = 2.\Phi \Rightarrow B_1.A = 2.B_2.A \Rightarrow B_1 = 2.B_2$$

Como apenas no braço central temos B_1 e nos outros temos B_2, a equação de fontes de corrente elétrica livre fica:

$$H_1.b+H_2.a+H_2.b+H_2.a = N.I \Rightarrow (H_1+H_2).b+2.H_2.a = N.I$$

O campo H pode ser escrito em função do campo magnético, fazendo isso na equação, obtemos:

$$\left(\frac{B_1}{\mu} + \frac{B_2}{\mu}\right).b + 2.\frac{B_2}{\mu}.a = N.I$$

Agora usamos a relação que descobrimos entre as intensidades dos campos magnéticos:

$$\left(\frac{2.B_2}{\mu} + \frac{B_2}{\mu}\right).b + 2.\frac{B_2}{\mu}.a = N.I \Rightarrow \frac{3.B_2}{\mu}.b + 2.\frac{B_2}{\mu}.a = N.I$$

$$\frac{B_2}{\mu}(3.b + 2.a) = N.I \Rightarrow B_2 = \frac{\mu.N.I}{3.b + 2.a}$$

Consequentemente, o campo magnético no braço central, temos:

$$B_1 = \frac{1}{2}.\frac{\mu.N.I}{3.b + 2.a}$$

11.7 Introdução de campo no interior de um ímã

Lembre-se que a equação de Poisson é:

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Então devemos encontrar algo do tipo, mas para as variáveis que declaramos.

Se $\vec{H} = -\vec{\nabla}\xi$, aplicando o divergente de ambos os lados da equação, encontramos uma relação interessante:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{H}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\xi) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla}^2 \xi \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \xi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$$

Como o enunciado traz, podemos afirmar que vale o seguinte:

$$\vec{\nabla}^2 \xi = -\rho_m$$

Logo, temos algo no mesmo formato da equação de Poisson. Lembre que, no geral, o potencial eletrostático é:

$$V(r) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}. \int \frac{\rho(r')}{|r - r'|}\, d^3 r' = \frac{1}{4.\pi}. \int \frac{\rho(r')}{\varepsilon_0}. \frac{1}{|r - r'|}\, d^3 r'$$

Comparando a equação obtida com a equação de Poisson, percebemos que fazemos as seguintes trocas:

$$\frac{\rho(r')}{\varepsilon_0} \rightarrow -\rho_m(r')$$

$$V \rightarrow \xi$$

Com isso, obtemos uma forma de calcular ξ dada uma distribuição ρ_m:

$$\xi = \frac{1}{4.\pi}. \int (-\rho_m(r')). \frac{1}{|r - r'|}\, d^3 r' = -\frac{1}{4.\pi}. \int \frac{\rho_m(r')}{|r - r'|}\, d^3 r'$$

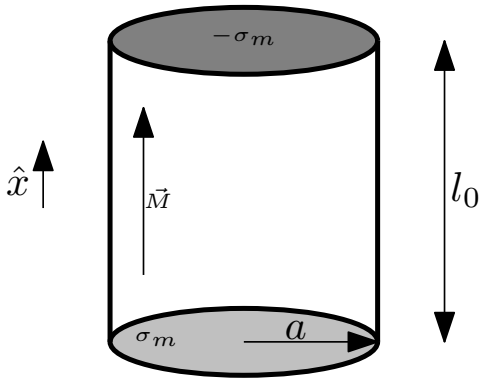
Aplicando $-\vec{\nabla}$ de ambos os lados da equação, conseguimos uma expressão para o vetor $\vec{H}$:

$$-\vec{\nabla}\xi = -\vec{\nabla}\left[-\frac{1}{4.\pi}. \int \frac{\rho_m(r')}{|r - r'|}\, d^3 r' \right] \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{4.\pi}. \vec{\nabla}\left[\int \frac{\rho_m(r')}{|r - r'|}\, d^3 r' \right]$$

Mas o enunciado diz que $\rho_m(r') = -\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(r')$. Assim, concluímos que o vetor $\vec{H}$ pode ser determinado sabendo o vetor magnetização $\vec{M}$:

$$\vec{H} = -\frac{1}{4.\pi}. \vec{\nabla}\left[\int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{M}(r')}{|r - r'|}\, d^3 r' \right]$$

11.8 Aplicando as ideias do *Problema* anterior na prática



Lembre que se temos uma superfície circular com densidade superficial de carga, o campo elétrico quando estamos no eixo do circulo, mas a uma distância l, é:

$$E = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right)$$

Tentaremos continuar relacionando a eletrostática com a magnetostática, assim os problemas terão uma solução mais simples.

No geral, o campo magnético poderá ser determinado com base nos vetores Magnetização e H:

$$\vec{B} = \mu_0.(\vec{H} + \vec{M})$$

Com as relações que verificamos anteriormente, podemos afirmar que:

$$\vec{E} \to \vec{H}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \to \sigma_m$$

$$\vec{M} \to -\sigma_m \ \hat{x}$$

Com isso já podemos resolver o problema.

a No centro do cilindro

No centro, os planos inferior e superior contribuirão igualmente com o campo elétrico, ou seja, poderemos duplicar o campo gerado por apenas um para encontra o total. A distância l entre o ponto e o plano é $\frac{l_0}{2}$:

$$E = 2.\frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - \frac{\frac{l_0}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2}}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4.a^2}{l_0^2}}}\right)$$

Lembre que $l_0 >> a$, então vale a aproximação:

$$(1 + x)^n = 1 + n.x$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\left(1 - \left[1 + \frac{4.a^2}{l_0^2}\right]^{\frac{-1}{2}}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\left(1 - 1 + \frac{1}{2}.\frac{4.a^2}{l_0^2}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\frac{2.a^2}{l_0^2}$$

Vetorialmente, é nítido que teremos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\frac{2.a^2}{l_0^2}\ \hat{x}$$

Consequentemente, o vetor H é:

$$\vec{H} = \sigma_m.\frac{2.a^2}{l_0^2}\ \hat{x} = -\vec{M}.\frac{2.a^2}{l_0^2}$$

Portanto, o campo magnético gerado no ponto é:

$$\vec{B} = \mu_0.\Big(-\vec{M}.\frac{2.a^2}{l_0^2} + \vec{M}\Big) = \mu_0.\vec{M}.\left(1 - \frac{2.a^2}{l_0^2}\right)$$

b No centro da face norte

Agora teremos a contribuição de campos elétricos distintos. A contribuição da face norte é com $l = 0$:

$$E_n = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - \frac{0}{\sqrt{a^2 + 0^2}}\right) = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}$$

A contribuição da face sul é com $l = l_0$, então:

$$E_s = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + l_0^2}}\right) = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{l_0^2} + 1}}\right) = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - \left[\frac{a^2}{l_0^2} + 1\right]^{\frac{-1}{2}}\right)$$

Novamente usaremos a aproximação:

$$E_s = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}.\left(1 - 1 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{l_0^2}\right) = \frac{\sigma}{4.\varepsilon_0}.\frac{a^2}{l_0^2}$$

Como os vetores apontam na mesma direção e têm mesmo sentido, o resultante é simplesmente a soma:

$$E = E_n + E_s = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{4.\varepsilon_0}.\frac{a^2}{l_0^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{4.l_0^2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\left(1 + \frac{a^2}{2.l_0^2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2}.\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\left(1 + \frac{a^2}{2.l_0^2}\right)\ \hat{x}$$

Agora usamos as relações para obter o vetor H:

$$\vec{H} = \frac{1}{2}.\sigma_m.\left(1 + \frac{a^2}{2.l_0^2}\right)\ \hat{x} = -\frac{1}{2}.\vec{M}.\left(1 + \frac{a^2}{2.l_0^2}\right)$$

Consequentemente, o campo magnético no centro da face norte é:

$$\vec{B} = \mu_0.\left(-\frac{1}{2}.\vec{M}.\left(1 + \frac{a^2}{2.l_0^2}\right) + \vec{M}\right) = \mu_0.\vec{M}.\left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{4.l_0^2}\right) = \frac{\mu_0.\vec{M}}{2}.\left(1 - \frac{a^2}{2.l_0^2}\right)$$

CAPÍTULO

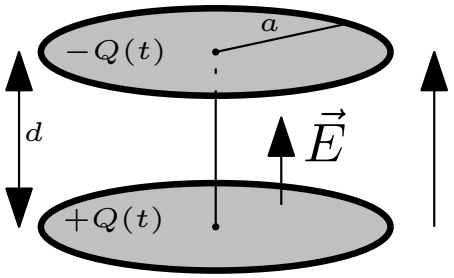
12

AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

"A felicidade e a miséria inevitavelmente aumentam com o aumento do poder e do conhecimento."

James Clerk Maxwell

12.1 Capacitor de capas paralelas com carga variável

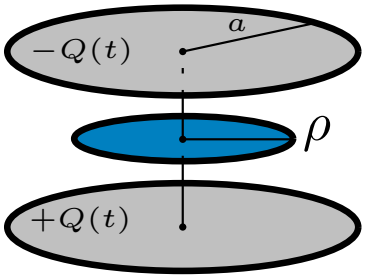


Pela definição de capacitância, podemos expressar o campo elétrico entre as placas:

$$C = \frac{\varepsilon_0.A}{d} = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{E.d} \Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_0.A} = \frac{Q_0.sen(\omega.t)}{\varepsilon_0.\pi.a^2}$$

Vetorialmente, temos:

$$\vec{E} = \frac{Q_0.sen(\omega.t)}{\varepsilon_0.\pi.a^2}\ \hat{z}$$



Agora podemos usar a Lei de Ampère com a correção de Maxwell, que considera a variação temporal do campo elétrico:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0.\vec{I} + \mu_0.\varepsilon_0.\frac{d}{dt}\left[\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}\right]$$

Não há corrente elétrica atravessando a superfície azul entre as placas, logo o módulo de $\vec{I}$ é nulo. Por isso, teremos:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{d}{dt}\left[\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}\right]$$

Como o campo magnético circula o caminho azul (regra da mão direita), vale que $\vec{B}\cdot d\vec{l} = B.dl$ e o campo elétrico é paralelo ao vetor normal à área, por isso $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E.dA$:

$$\oint_C B\ dl = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{d}{dt}\left[\int_S E\ dA\right] \Rightarrow B.2.\pi.\rho = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{d}{dt}\left[\frac{Q_0.sen(\omega.t)}{\varepsilon_0.\pi.a^2}.\pi.\rho^2\right]$$

$$B.2.\pi.\rho = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{Q_0}{\varepsilon_0.\pi.a^2}.\pi.\rho^2.\frac{d}{dt}[sen(\omega.t)] = \mu_0.\varepsilon_0.\frac{Q_0}{\varepsilon_0.\pi.a^2}.\pi.\rho^2.\omega.cos(\omega.t)$$

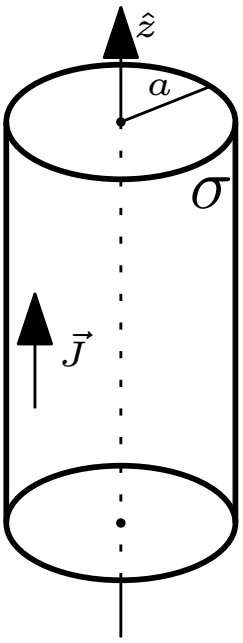
Agora apenas isolamos o valor do campo magnético:

$$B = \frac{1}{2.\pi.\rho}.\mu_0.\varepsilon_0.\frac{Q_0}{\varepsilon_0.\pi.a^2}.\pi.\rho^2.\omega.cos(\omega.t) = \frac{\mu_0.Q_0.\omega}{2.\pi.a^2}.cos(\omega.t).\rho$$

Vetorialmente, obtemos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0.Q_0.\omega}{2.\pi.a^2}.cos(\omega.t).\rho\ \hat{\varphi}$$

12.2 Fio condutor cilíndrico transportando densidade de corrente



a Campo magnético na superfície do cilindro

Como a corrente é constante, o vetor densidade de corrente, e consequentemente o vetor campo elétrico, também serão. Logo, neste caso, a correção de Maxwell pode ser ignorada.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 . I$$

A partir da definição de densidade de corrente, a corrente elétrica é:

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A} = J.A$$

Teremos, então:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 . J.A$$

Queremos o valor na superfície, logo $r = a$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B.2.\pi.a = \mu_0 . J.\pi.a^2 \Rightarrow B = \frac{1}{2.\pi.a} . \mu_0 . J.\pi.a^2 = \frac{\mu_0 . a.J}{2}$$

Vetorialmente, pela Regra da mão direita:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 . a.J}{2} \, \hat{\varphi}$$

b Vetor de Poynting na superfície

Pela definição, o vetor de Poynting é:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} . \vec{E} \times \vec{B}$$

Pela Primeira Lei de Ohm, sabemos que:

$$\vec{J} = \sigma . \vec{E}$$

Então o vetor de Poynting pode ser expresso como:

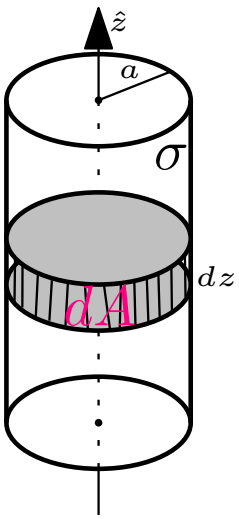
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} . \frac{\vec{J}}{\sigma} \times \vec{B} = \frac{1}{\sigma . \mu_0} . \vec{J} \times \vec{B}$$

O vetor densidade de corrente tem a mesma direção do fio, então teremos:

$$\vec{S} = \frac{1}{\sigma.\mu_0}.J.\hat{z} \times B.\hat{\varphi} = \frac{J.B}{\sigma.\mu_0}.\hat{z} \times \hat{\varphi} = \frac{J.\frac{\mu_0.a.J}{2}}{\sigma.\mu_0}.\hat{\rho} = -\frac{J^2.a}{2.\sigma}\ \hat{\rho}$$

Caso o produto vetorial não fique claro, lembre que o resultado deve ser perpendicular à $\vec{z}$ e $\vec{\varphi}$ ao mesmo tempo.

c Energia dissipada por unidade de tempo no fio



A área lateral do cilindro pode ser escrita como:

$$d\vec{A} = a.dz.d\varphi\ \hat{\rho}$$

Logo, o fluxo de $\vec{S}$ é:

$$\Phi_S = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int \left[-\frac{J^2.a}{2.\sigma}\ \hat{\rho} \right] \cdot [a.dz.d\varphi\ \hat{\rho}] =$$

$$\Phi_S = -\int\int \frac{J^2.a}{2.\sigma}.a\ dz\ d\varphi = \frac{-J^2.a^2}{2.\sigma}.\int_0^l dz \int_0^{2.\pi} d\varphi$$

Concluímos então que:

$$\Phi_S = \frac{-J^2.a^2}{2.\sigma}.l.2.\pi = \frac{-J^2.a^2.l.\pi}{\sigma}$$

Agora devemos mostrar que isso é igual a $P = I^2.R$. Primeiro, vamos trocar a densidade de corrente pela corrente elétrica:

$$I = J.A = J.\pi.a^2 \Rightarrow J = \frac{I}{\pi.a^2} \Rightarrow J^2 = \frac{I^2}{(\pi.a^2)^2}$$

Substituindo:

$$\Phi_S = \frac{-\frac{I^2}{(\pi.a^2)^2}.a^2.l.\pi}{\sigma} = \frac{-I^2.l}{\pi.a^2.\sigma}$$

A resistência elétrica é, pela Segunda Lei de Ohm:

$$R = \rho.\frac{l}{A} = \rho.\frac{l}{\pi.a^2} = \frac{l}{\sigma.\pi.a^2}$$

Portanto, provamos que o fluxo do vetor de Poynting é igual a potência dissipada pelo cilindro:

$$\Phi_S = -I^2.R = P_R$$

12.3 Emissão de luz por uma lâmpada

Inicialmente, devemos calcular a intensidade da luz à distância dada:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4.\pi.r^2}$$

O valor do campo elétrico médio quadrático pode ser encontrado com base na equação:

$$I = \frac{E_{rms}^2}{c.\varepsilon_0} \Rightarrow E_{rms} = \sqrt{I.\varepsilon_0.c} = \sqrt{\frac{P}{4.\pi.r^2}.\frac{1}{c.\varepsilon_0}}$$

Substituindo os valores:

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{100}{4.\pi.1^2}.\frac{1}{(3.10^8).(8,85.10^{-12})}} = 54,4\ \frac{V}{m}$$

Para obtermos o valor do campo magnético, simplesmente dividimos pela velocidade da luz:

$$B_{rms} = \frac{E_{rms}}{c} = \frac{54,7}{3.10^8} = 1,82.10^{-7}\ T$$

Essa imensa diferença entre os valores médios desses campos serão a justificativa para desconsiderarmos o campo magnético quando formos estudar Óptica Física.

12.4 Emissão de luz solar

a Valores máximos dos campos elétrico e magnético

Para ondas planas, a intensidade é dada por:

$$I = \frac{E_0.B_0}{2.\mu_0}$$

Sendo E_0 e B_0 os valores máximos que o módulo dos campos elétrico e magnético assumem. Usando a relação entre campo elétrico e magnético

$$B = \frac{E}{c}$$

poderemos determinar o valor do módulo a partir da intensidade:

$$I = \frac{E_0.E_0}{2.c.\mu_0} = \frac{E_0^2}{2.c.\mu_0} \Rightarrow E_0 = \sqrt{2.I.c.\mu_0}$$

Teremos que converter a intensidade em $\frac{W}{m^2}$:

$$I = 2.4,18.\frac{1}{10^{-4}}.\frac{1}{60} = \frac{4,18}{3}.10^3 \ \frac{W}{m^2}$$

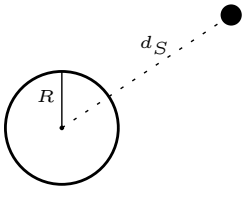
Agora sim podemos calcular:

$$E_0 = \sqrt{2.\left(\frac{4,18}{3}.10^3\right).(3.10^8).(4.\pi.10^{-7})} = 1,02.10^3 \ \frac{V}{m}$$

Consequentemente, o campo magnético máximo é:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1,02.10^3}{3.10^8} = 3,4.10^{-6} \ T$$

b Intensidade na superfície solar



A intensidade da luz varia com o inverso do quadrado da distância. Porém, a potência (que está associada com o emissor da luz) não varia, logicamente. Então, inicialmente, podemos descobrir a potência fornecida pelo Sol partindo da definição de intensidade:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4.\pi.d_s^2} \Rightarrow P = I.4.\pi.d_s^2$$

Agora, aplicamos novamente a equação, mas para a área cujo raio seja o raio do Sol, assim saberemos a intensidade na superfície solar:

$$I_S = \frac{P}{A} = \frac{I.4.\pi.d_s^2}{4.\pi.R^2} = \frac{I.d_s^2}{R^2}$$

Substituindo os valores, temos:

$$I_S = \frac{\left(\frac{4,18}{3}.10^3\right).(1,5.10^{11})^2}{(6,9.10^8)^2} = 1,59.10^7 \ \frac{W}{m^2}$$

12.5 Propagação de energia eletromagnética

Vamos partir da definição do vetor de Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}.\vec{E} \times \vec{B}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, podemos usar a relação dada no enunciado:

$$\vec{S}^2 = \frac{1}{\mu_0^2}.(\vec{E} \times \vec{B})^2 = \frac{1}{\mu_0^2}.(E^2.B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2)$$

Agora substituímos o vetor de Poynting por $U.\vec{v}$ e multiplicamos ambos os lados por $-c^{-2}$, pois veja que devemos encontrar uma razão do tipo $\frac{v}{c}$.

$$U^2.\vec{v}^2 = \frac{1}{\mu_0^2}.(E^2.B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2) \Rightarrow -\frac{v^2}{c^2}.U^2 = \frac{-1}{c^2.\mu_0^2}.(E^2.B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2)$$

Comando U^2 de ambos os lados, o lado esquerdo da equação já fica como queremos:

$$U^2 - \frac{v^2}{c^2}.U^2 = U^2 - \frac{1}{c^2.\mu_0^2}.(E^2.B^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2)$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = U^2 + \frac{1}{c^2.\mu_0^2}.((\vec{E} \cdot \vec{B})^2 - E^2.B^2)$$

A densidade de energia eletromagnética U é simplesmente $U_E + U_M$, a soma das densidades de energia elétrica e magnética.

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = (U_E + U_M)^2 + \frac{1}{c^2.\mu_0^2}.((\vec{E} \cdot \vec{B})^2 - E^2.B^2)$$

Também podemos lembrar que a velocidade da luz é dada a partir de constantes fundamentais

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}}$$

Substituindo e fazendo a distributiva com o termo entre parênteses do lado direito:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = (U_E + U_M)^2 + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.((\vec{E} \cdot \vec{B})^2 - E^2.B^2)$$

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = (U_E + U_M)^2 + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 - \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.E^2.B^2$$

As densidades de energia são definidas como:

$$U_E = \frac{\varepsilon_0.E^2}{2}$$

$$U_M = \frac{B^2}{2.\mu_0}$$

O último termo do lado direito pode ser modificado:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = (U_E+U_M)^2 + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 - 4.U_E.U_M$$

Fazendo algumas manipulações simples, obtemos a equação do enunciado:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = U_E^2 + U_M^2 + 2.U_E.U_M + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 - 4.U_E.U_M$$

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = U_E^2 + U_M^2 - 2.U_E.U_M + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.(\vec{E}\cdot\vec{B})^2$$

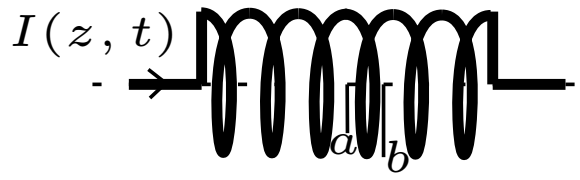
$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).U^2 = (U_E-U_M)^2 + \frac{\varepsilon_0}{\mu_0}.(\vec{E}\cdot\vec{B})^2$$

A condição para que $v = c$ é que:

$$1-\frac{v^2}{c^2} = 0$$

Para que isso ocorra, devemos ter $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ e $U_E - U_M = 0$, ou seja, os campos devem ser perpendiculares e carregarem a mesma quantidade de energia.

12.6 Cabo coaxial



a Variação da corrente elétrica e diferença de potencial com a posição

Partindo da definição de corrente elétrica:

$$I(z,t) = -\frac{\partial}{\partial t}[Q(z,t)]$$

Com a definição de capacitância, podemos substituir a carga pela diferença de potencial:

$$I(z,t) = -\frac{\partial}{\partial t}[C.V(z,t)] = -C.\frac{\partial}{\partial t}[V(z,t)]$$

Dividindo pelo comprimento de ambos os lados, fazemos a capacitância por unidade de comprimento surgir:

$$\frac{I(z,t)}{z} = -\frac{C}{z}.\frac{\partial}{\partial t}[V(z,t)] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}[I(z,t)] = -\hat{C}.\frac{\partial}{\partial t}[V(z,t)]$$

Para a diferença de potencial é mais simples, apenas aplicamos a queda de potencial ao indutor:

$$V(z,t) = -L.\frac{\partial}{\partial}[I(z,t)] \Rightarrow \frac{V(z,t)}{z} = -\frac{L}{z}.\frac{\partial}{\partial}[I(z,t)]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[V(z,t)] = -\hat{L}.\frac{\partial}{\partial}[I(z,t)]$$

b Propagação na velocidade da luz

Faremos a demonstração para a corrente elétrica, o mesmo vale para a diferença de potencial.

Vamos pegar a equação encontrada no ***item*** anterior e aplicar novamente a derivada espacial:

$$\frac{\partial}{\partial z}[I(z,t)] = -\hat{C}.\frac{\partial}{\partial t}[V(z,t)] \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2}[I(z,t)] = -\hat{C}.\frac{\partial^2}{\partial z \partial t}[V(z,t)]$$

Tanto faz ordem em que derivamos a diferença de potencial, então podemos derivar na posição primeiro:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}[I(z,t)] = -\hat{C}.\frac{\partial^2}{\partial t \partial z}[V(z,t)] = -\hat{C}.\frac{\partial}{\partial t}.\left[\frac{\partial}{\partial z}[V(z,t)]\right]$$

Já vimos anteriormente que:

$$\frac{\partial}{\partial z}[V(z,t)] = -\hat{L}.\frac{\partial}{\partial}[I(z,t)]$$

Substituindo:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}[I(z,t)] = -\hat{C}.\frac{\partial}{\partial t}.\left[-\hat{L}.\frac{\partial}{\partial t}[I(z,t)]\right] = \hat{C}.\hat{L}.\frac{\partial^2}{\partial t^2}[I(z,t)]$$

Essa é a equação geral de uma onda I com velocidade de propagação igual a $\frac{1}{\sqrt{\hat{C}.\hat{L}}}$.

$$v = \frac{1}{\sqrt{\hat{C}.\hat{L}}}$$

Lembre que:

$$\hat{C} = \frac{2.\pi.\varepsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\hat{L} = \frac{\mu_0.ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2.\pi}$$

Portanto, provamos que a corrente elétrica se propaga na velocidade da luz:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{2.\pi.\varepsilon_0}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}.\frac{\mu_0.ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2.\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0.\varepsilon_0}} = c$$